

2026
物理研究部
部誌



PHYSICS

第80回 灘校文化祭

■はじめに

今日は、第 80 回灘校文化祭『Polaris』ならびに物理研究部へご来場いただきありがとうございます。液体窒素を用いた実験ショーや、ブースでの展示はお楽しみいただけただいしょうか。

物理研究部では、普段の講義やゼミ、物理オリンピック、そしてこの文化祭といった場を通して、それぞれの部員が物理学に向き合い、挑戦しています。私たちがこうして物理を存分に楽しめているのは、先生や保護者の方々、そしてこの部誌を読んでくれている皆様の支えのおかげです。この場を借りて、心より感謝申し上げます。

さて、私事にはなりますが、今年で高校最後の文化祭になってしまいました。振り返ってみると、時間の流れる速さに驚かされるばかりです。残された短い高校生活を全力で楽しんでいこうと思っています。

ところで「物理とはなにか」と問われると、一言で答えるのは意外と難しいのではないのでしょうか。自然科学の一分野ということに変わりはないのですが、数学や化学とはどう違うのでしょうか。数学は理論の整合性そのものを探求する学問であり、化学は物質の具体的な性質や反応を重視する学問です。それに対して物理は、複雑な現実世界を対象としつつ、その背後にある本質的な法則を抜き出し、できるだけ単純な形で捉えようとする学問です。もちろんこれは学問に優劣をつけているわけではなく、世界に向き合う姿勢が違うだけで、それぞれに唯一無二のおもしろさがあると思います。

私がその中でも物理を選んだ理由は、身の回りの疑問に最も明確に答えてくれるからです。「どうして空は青いのか」「ものは何でできているのか」「宇宙はどこまで続くのか」といった、誰も思ったことのあるような疑問を追求し、答えを与えるのが物理学の目標です。与えられたことをそのまま受け取るのではなく、「なぜそうなるのか」「本当にそう考えていいのか」と、立ち止まって考える姿勢こそが、物理学の魅力だと思っています。今回の展示や部誌を通して、そんな物理に少しでも興味をもっていただけたら幸いです。

それでは、私たち物理研究部が愛してやまない物理の世界を、ぜひお楽しみください！

(79 回生 部長 K.R)

目次

第 1 部 展示説明	3
1 ダイラタンシー	3
2 楕円ビリヤード	4
3 ペンデュラムウェーブ	6
第 2 部 活動紹介	9
4 中一講義	9
5 中二講義	11
6 新高講義	17
7 力学ゼミ	20
第 3 部 寄稿記事	27
8 電磁気学小ネタ	27
9 運動方程式はなぜ 2 階なのか	33
10 流体としての宇宙 — 一般相対論が描く宇宙のダイナミクス —	41

第 1 部

展示説明

ここでは、物理教室で行っている展示の一部を解説します。なお、この記事執筆しているのは3月ですので、準備の都合上記事の内容が実際の展示と異なることがあります。ご了承ください。

1 ダイラタンシー

概要

皆さんはダイラタンシー流体をご存知ですか？ テレビや SNS でもたびたび取り上げられる、握ると固まる不思議な液体ですが、実はお家で簡単に作ることができます。ここではその仕組みを説明したいと思います。

1.1 ダイラタンシーとは

ダイラタンシーとは、ある物体に加える力の強さや速度によって、その粘度（ねばりけ）が変化する現象のことです。最も有名な例は水溶き片栗粉であり、水と片栗粉を 1:2 の割合で混ぜるだけで作れます。実際に触ってもらおうとわかりやすいのですが、ゆっくり混ぜるとドロドロした液体なのに、素早く叩いたり握ったりすると硬いゴムのような手応えになります。このように、強い衝撃を加えると固体のように振る舞うのがダイラタンシー流体の特徴です。この性質を利用した、液体の上を走る科学実験を見たことがある人もいると思います。とても不思議ですね。

1.2 ダイラタンシーの仕組み

では、どうして叩くだけで液体が固くなるのでしょうか。その秘密は、液体の中に分散している粒子の隙間にあります。

水溶き片栗粉は、液体の中に固体の微粒子が均質に混ざっているコロイドです*1。このとき、片栗粉の粒子同士の間には十分な水が入り込んでいるので、粒子は自由に動くことができ、全体と

*1 特に、水溶き片栗粉は液体を分散媒とするゾルです。ゾルがゼリー状に固化化したものはゲルと呼ばれます。

して液体のように振る舞います（ゾル状態）。

しかしここに強い力が加わると、粒子がずれて隙間の体積が大きくなり、その隙間に水が流入します。すると、粒子の表面を潤す水が足りなくなって摩擦が増大し、その結果全体が固体のように硬化するのです（ゲル状態）。

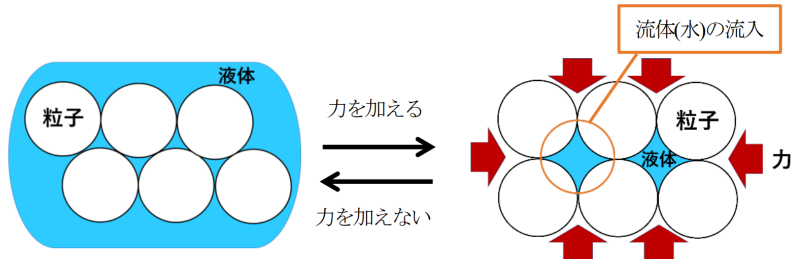


図 1.1

このように、粒子間の隙間の体積が膨張する (dilate) 性質が、ダイラタンシー (dilatancy) という名前の由来になっています。

1.3 おわりに

ダイラタンシーは、地震によって地盤がゆるくなってしまいう液状化現象と深く関わっています。これは、地震の振動で砂の粒子がより狭い隙間に潜り込み、水が押し出されることによって起こります。先ほど説明したダイラタンシーと逆の現象が起こっているということです。この現象は、普通のダイラタンシーに対してしばしば負のダイラタンシーと呼ばれます。また、ダイラタンシーは他にも防護服や土木工学などにも応用されているようです。

ぜひ、お家で作って実験してみてください。

(79 回生 K.R.)

参考文献

- [1] <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%80%E3%82%A4%E3%83%A9%E3%82%BF%E3%83%B3%E3%82%B7%E3%83%BC>
- [2] <http://www.taka-ichi-h.ed.jp/img/R05-07.pdf>

2 楕円ビリヤード

概要

皆さんご存じの通り、普通のビリヤードは長方形のテーブルを用いて行われます。しかしここでは、キャロムビリヤードという、手玉（自分が撞く玉）を的玉（ほかの玉）に当てるゲームを楕円形のテーブルで行うことを考えてみましょう。

2.1 楕円の反射定理

さて、ここでは楕円の持つ面白い性質について紹介します。そこで、次の命題が真であることを示します。

命題：楕円の反射定理

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の焦点を F, F' とし、この楕円上の点 $A(x_0, y_0)$ における接線を l とおく。このとき、 l と FA がなす角と、 l と $F'A$ がなす角は等しくなる。

$y_0 = 0$ のとき定理の成立は自明なので、 $y_0 \neq 0$ で考えます。 A における法線と x 軸の交点を B とおくと、角の二等分線定理より、題意を示すには

$$AF : AF' = BF : BF' \quad (2.1)$$

を示せば十分です。 $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ より、三平方の定理から

$$AF^2 = (x_0 - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y_0^2 \quad (2.2)$$

であり、 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ を用いて y_0 を消去すると、

$$\begin{aligned} (2.2) \iff AF^2 &= x_0^2 - 2x_0\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} \\ &= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2 - 2x_0\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}x_0 - a\right)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

となります。 $x_0 \leq a$ より、

$$(2.3) \iff AF = a - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}x_0$$

です。また、 $AF + AF' = 2a$ より、

$$AF' = a + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}x_0$$

ここで、楕円の A における法線の方程式は

$$\frac{x_0}{a^2}(y - y_0) - \frac{y_0}{b^2}(x - x_0) = 0 \quad (2.4)$$

であり、 B の y 座標が 0 であることから、(2.4) より $y = 0$ のとき

$$x = x_0 - \frac{b^2}{a^2}x_0$$

です。よって、

$$BF = \left| \sqrt{a^2 - b^2} - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x_0 \right|, \quad BF' = \left| \sqrt{a^2 - b^2} + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x_0 \right|$$

となるので

$$AF \times \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = BF, \quad AF' \times \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = BF'$$

であり、(2.1) が従います。したがって題意が示されました。

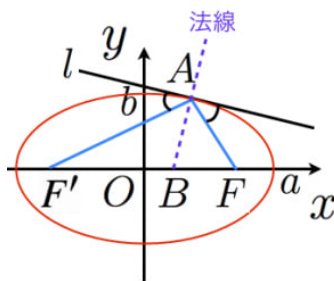


図 2.1

2.2 まとめ

楕円の反射定理から、手玉を楕円の焦点に、的玉をもう一つの焦点に置き、手玉にある程度の力を加えるように撞くと、どのような方向に撞いたとしても、手玉は必ず的玉に当たるといことが分かります。ビリヤードをしても、どうしても手玉のコントロールがうまくいかないという方は、楕円形の台でビリヤードをすることをおすすめします。ここまで読んでいただきありがとうございました。

(79 回生 N.H.)

参考文献

[1] <https://manabitimes.jp/math/1136>

3 ペンデュラムウェーブ

概要

この章ではペンデュラムウェーブという面白い振り子現象を入り口として、その背後に存在する振り子の周期や運動に関する重要な性質について踏み込んでいこうと思います。

3.1 ペンデュラムウェーブとは

ペンデュラムウェーブ (pendulum wave) とは、1 列に並べた周期の異なる複数の振り子が時間の経過に伴い様々なパターンを見せる波のような現象のことです。時間が経過につれバラバラになった振り子が 2 列、3 列に整列し、一定時間後には再度すべての振り子が 1 列に並びます。実際に見てもらおうと分かりますが、弊部で展示しているものはちょうど 1 分おきに 1 列に並ぶようになっています。ではこのペンデュラムウェーブには一体どのような背景があるのでしょうか？

3.2 ペンデュラムウェーブの背景

ちょうど 1 分おきに振り子を 1 列に並ばせるには一見振り子の長さ、振れ角、重さなどの要素を調整する必要があるように思えますが、実は長さを調整するだけで大丈夫です。これは振り子の等時性という性質に由来します。振り子の等時性とは振り子の周期が振り子の長ささと重力加速度にのみ依存するという性質で、振れ角が十分に小さい場合に保証されます。確かにこれなら調節するのは長さだけで大丈夫ですね！以下では振り子の等時性を示した後、その破れについても触れていきます。

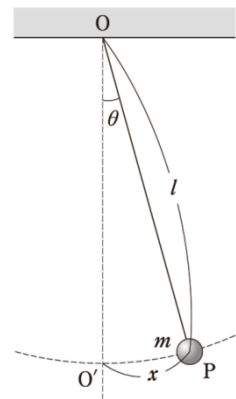


図 3.1

単振り子の周期 (微小振動近似)

図 3.1 のような場合、接線方向の力を F 、加速度 (反時計回り方向を正とする) を a 、重力加速度を g とすると、 $F = -mg \sin \theta$ より運動方程式は $ma = -mg \sin \theta$ となります。ここで $x = l\theta$ であり、 θ が十分に小さいとき $\sin \theta \simeq \theta$ なので、

$$ma = -\frac{mg}{l}x$$

これを単振動の運動方程式 $ma = -m\omega^2 x$ と比較すると、角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ と求まります。

よって、周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ となり、 g は定数なので確かに周期 T は振り子の長さ l のみに依存することがわかります。

等時性の破れ (θ を限定しない場合)

では、次に θ の範囲を限定しない場合についても考えてみましょう。振り子が最も大きく振れたときの θ を θ_{\max} とすると、その際振り子の速度 v は 0 です。力学的エネルギー保存則より、

$$mgl(1 - \cos \theta_{\max}) = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_{\max})}{l}}$$

対称性より $\frac{d\theta}{dt} \geq 0$ の範囲 ($\theta: 0 \rightarrow \theta_{\max}$) について考え、変数分離を行うと、

$$\frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}} d\theta = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt$$

両辺を積分します。 θ が $0 \rightarrow \theta_{\max}$ まで変化する時間は周期の $1/4$ ($t: 0 \rightarrow T/4$) なので、

$$\int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}} d\theta = \int_0^{T/4} \sqrt{\frac{2g}{l}} dt = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{2g}{l}} \tag{3.1}$$

(3.1) の左辺を解くために、 $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \sin \phi$ なる変数 ϕ を導入すると、

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \theta_{\max} &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}\right) = 2 \left(\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} (1 - \sin^2 \phi) = 2 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \cos^2 \phi \end{aligned}$$

となるので、(3.1) 左辺の積分は次のように書き換えられます*2。

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \cos^2 \phi}} \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \cos \phi}{\cos \frac{\theta}{2}} d\phi \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned} \tag{3.2}$$

*2 $d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \cos \phi}{\cos \frac{\theta}{2}} d\phi$, $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \sin^2 \phi}$ を用いました。

ここで、被積分関数 $(1 - m \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}}$ (ただし $m = \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}$) をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} (1 - m \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}(-m \sin^2 \phi) + \frac{3}{8}(-m \sin^2 \phi)^2 - \frac{15}{48}(-m \sin^2 \phi)^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \sin^{2n} \phi \end{aligned}$$

右辺を項別積分してウォリスの公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \phi d\phi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ を用いると、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2 m^n$$

よって、(3.1) および (3.2) より、周期 T は最終的に以下ようになります。

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \sin^2 \phi\right)^{-\frac{1}{2}} d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2 \sin^{2n} \frac{\theta_{\max}}{2} \right]$$

残念ながら、 θ の範囲を限定しない場合では周期 T は振り子の長さ l のみでなく最大振れ角 θ_{\max} にも依存することがわかりましたね。これを振り子の等時性の破れといいます。

3.3 おわりに

実は今回扱った $\int_0^{\phi} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$ や $\int_0^{\phi} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$ は楕円積分と呼ばれており、前者が第一種楕円積分、後者が第二種楕円積分と呼ばれています。今回の振り子の周期の導出のほかにも、楕円積分を用いることで楕円の周や正弦曲線、レムニスケート（極座標表示で $r^2 = \cos 2\theta$ と表される曲線）の長さも求めることができるので、興味がある方は是非一度自分で求めてみてください。

(79 回生 T.N)

参考文献

- [1] <https://date-physics.jimdofree.com/2024/01/29/%E6%8CAF%E3%82%8A%E5%AD%90%E3%81%AE%E7%AD%89%E6%99%82%E6%80%A7/>
- [2] <https://hooktail.sub.jp/mathInPhys/elliptical/>
- [3] <https://manabitimes.jp/math/2651>

第 2 部

活動紹介

昨年度の物理研究部では大きく分けて以下の 4 つの活動を行っていました。中学 1 年生を対象とした中一講義，中学 2 年生を対象とした中二講義，新高生を対象とした新高講義，そして高校生を対象とした力学ゼミです。ここではこれらの活動について，担当者や実際に講義を受けた部員がその内容も交えて紹介していきます。

.....

4 中一講義

4.1 はじめに

中一講義は週に一度、上学年の生徒が中学一年生の部員へ行う講義です。その内容は、まずは物理を理解するために必要な数学の習得を図ります。前年度では二次方程式・二次関数、指数対数、三角関数、微分積分、ベクトルの内容を、二学期の終わり程まで行いました。

そして三学期から物理の内容に入ります。今年は『理論物理への道標』を用いています。まずは力学の分野から丁寧にいきます。さまざまな運動を数学的に正確に説明できるようになることを目標とします。では具体的な講義の内容を一部抜粋して紹介します。

4.2 運動方程式から出発して慣性力を考える

運動方程式とはニュートン力学を定義するための運動の 3 法則のうち、「運動の第 2 法則」である。物体に力を加えると物体には力の向きに、力の大きさに比例した加速度が生じることが、実験により分かった。その比例定数を $\frac{1}{m}$ とおくと、

$$a = \frac{1}{m}F \quad \therefore \quad ma = F$$

上式を運動方程式と定義し、 m をその物体の質量（慣性質量）と呼ぶ。

慣性力とは観察者が加速度を持つとき、見ている質量 m の物体には、実際に働く力のほかに、加速度の向きとは逆向きに働く大きさ ma の力である。では一体なぜこのような力が働くのだろうか。

右向きに加速度 α で進む電車の床に置かれた質量 m の物体の運動方程式を、電車の中で観察している人と電車の外から観察している人それぞれの視点から考える。

電車内の人から見たときについて考える。電車の加速度 α と逆向きに大きさ $m\alpha$ の慣性力が働き、加速度 α と逆向きに加速度 β で運動していたとすると、物体には加速度の向きに滑りを止めるためのとある大きさの摩擦力（大きさを N とおく）が働く。この観測者から見たときのこの物体の加速度は、加速度 α と逆向きを正にして β であり、物体に働く力は $m\alpha - N$ より、運動方程式は、

$$m\beta = m\alpha - N \quad (4.1)$$

電車外の人から見たとき、物体の加速度は電車の進行方向を正として $\alpha - \beta$ であり、物体に働く力は慣性力を無視するので N である。よって運動方程式は、

$$m(\alpha - \beta) = N \quad (4.2)$$

(4.1) と (4.2) が同値であることは自明である。一方、慣性力を導入しなかったならば両式は矛盾する。よって加速度系で静止系と同じ運動方程式を得ることができるように導入する量が慣性力であることが分かった。

4.3 運動方程式から出発して斜方投射を考える

点 O から水平線と角 θ_0 をなす方向へ初速 v_0 で投げられた質量 m のボールの運動を考察する。ただしその速さに比例して抵抗力が速度の逆向きにはたらくとする。ここで水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。

ボールの速度を $\vec{v} = (v_x, v_y)$ 、 $v = |\vec{v}|$ 、 k を比例定数として、抵抗力 $\vec{f} = (f_x, f_y)$ は、

$$\begin{aligned} f_x &= -mkv \cos \theta = -mkv_x \\ f_y &= -mkv \sin \theta = -mkv_y \end{aligned}$$

と表せる。よって、ボールの運動方程式は、加速度は速度の時間微分で求められるので、

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -mkv_x \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -mkv_y - mg = -mk \left(v_y + \frac{g}{k} \right) \end{aligned}$$

速度を求めるために、この式が変数分離形であることに注目して計算する。

変数分離型の微分方程式とは、 $P(x)$ を x のみの連続関数（グラフにしたときに曲線が途切れないような方程式）、 $Q(y)$ を y のみの連続関数として、

$$y' = \frac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$$

という形になる方程式のことであり、この式の両辺を $Q(y)$ で割って、

$$\frac{1}{Q(y)} \frac{dy}{dx} = P(x)$$

両辺を x で不定積分して

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{Q(y)} \frac{dy}{dx} dx &= \int P(x) dx \\ \int \frac{1}{Q(y)} dy &= \int P(x) dx \end{aligned}$$

となり、計算しやすい形に落とすことができた。そして、不定積分では積分定数が出てきてしまい、数値を 1 つに定めることはできないが、「初期条件」が一つ定められていたら、数値を絞ることが可能である。では、実際に計算をする。

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv_x}{dt} &= -mkv_x \\
 \frac{1}{v_x} \frac{dv_x}{dt} &= -k \\
 \int \frac{1}{v_x} dv_x &= \int -k dt \\
 \log |v_x| &= -kt + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
 v_x &= C_0 e^{-kt} \quad (C_0 = \pm e^C)
 \end{aligned}$$

初期条件「 $t = 0$ のとき、 $v_x = v_0 \cos \theta_0$ 」を用いることができるので、 $C_0 = v_0 \cos \theta_0$ となり、

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 e^{-kt}$$

とわかり、 x 方向の速度を定めることができる。

同様に、

$$v_y = -\frac{g}{k} + \left(v_0 \sin \theta_0 + \frac{g}{k} \right) e^{-kt}$$

と求めることができる。また、この場では計算はしないが、これをさらに時間で積分すると位置ベクトルを求めることもできる。

4.4 おわりに

上記の内容のように、計算をしてゆき論理的に物事を理解することを目標としています。また、斜方投射の運動を求める計算を見てもわかるように、複雑な運動について理解するためには微分積分をはじめとする数学の力が必要になってきます。中一講義では物理の奥深い面白い世界に入ってゆくための基礎の土台をしっかりと固めてゆきます。

(81 回生 K.K.)

参考文献

- [1] 杉山忠男, 『理論物理への道標 (上)』, 河合出版, 2014
-

5 中二講義

5.1 はじめに

物理研究部には、現在は 10 人弱の中学 3 年生が所属しています。昨年度は、この中 3 (当時は中 2) のみんなで中二講義を行っていました。1 学期は高校生の先輩に教えてもらう形で、微分積分や微分方程式、テイラー展開、ベクトル解析などの物理に必要な少し高度な数学を学び、2・3 学期は中 2 のみんなで交代で講義者を担当し、教科書を読み進めるゼミ形式で、『基幹講座物理学 力学』という本を使って力学を勉強していました。

5.2 ケプラーの法則と万有引力の法則

昨年度の中二講義で扱った内容を一つ抜粋して紹介します。

ケプラーの法則から、太陽と惑星（太陽の周りを回っている天体）との間に働く万有引力を導くという内容です。興味のある方は読んでいただくと幸いです。

ケプラーの法則とは、ヨハネス・ケプラーが17世紀初頭に惑星の観測記録の解析を通して見出した惑星運動に関する三つの法則です。具体的には以下のような法則です。

ケプラーの法則

- ・ 第1法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を動く。
- ・ 第2法則：惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に掃く面積（面積速度）は一定である。
- ・ 第3法則：惑星の公転周期の2乗は、軌道の長半径の3乗に比例する。

これらの法則を使って議論を進めていく前に、まず楕円について少し説明しようと思います。

楕円とは、平面上の2定点から距離の和が一定となる点の集合からなる曲線のことで、この2定点のことを焦点といいます。また、図5.1のように、中心から最も遠い点までの長さを長半径、最も短い点までの長さを短半径といいます。

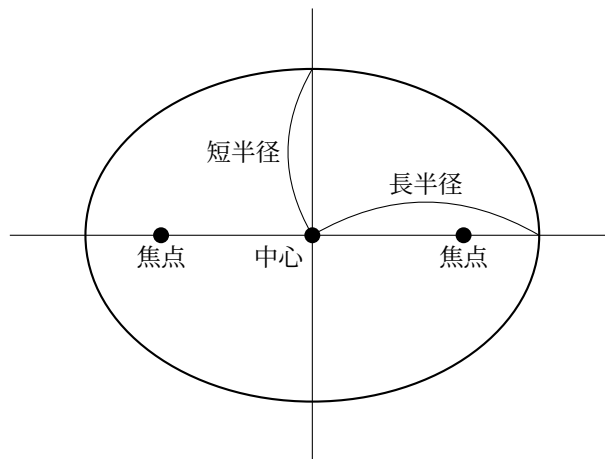


図 5.1

さらに、中心から焦点までの長さを長半径で割った値を離心率といい、楕円のつぶれ具合を表します。

惑星が、図5.2(左)のように太陽を一つの焦点とした長半径 a 、短半径 b 、離心率 ε の楕円軌道上を動いたとします。この楕円の極座標表示を求めていきましょう。

楕円上の点と2焦点との距離の和が一定であることから、

$$r + r' = AO + AF = 2a$$

よって、

$$r'^2 = (2a - r)^2 = r^2 - 4ar + 4a^2$$

が成り立ちます。図5.2(右)は左の楕円の中にある $\triangle PFO$ を抜き出したものです。この直角三

角形において三平方の定理から、

$$r'^2 = r^2 \sin^2 \theta + (2a\varepsilon + r \cos \theta)^2 = r^2 + 4a\varepsilon r \cos \theta + 4a^2\varepsilon^2$$

したがって、これらの 2 式を連立して、

$$r^2 - 4ar + 4a^2 = r^2 + 4a\varepsilon r \cos \theta + 4a^2\varepsilon^2$$

整理すると、

$$r(1 + \varepsilon \cos \theta) = a(1 - \varepsilon^2)$$

が得られます。よって、図 5.2(左) の長半径 a 、離心率 ε の楕円は平面極座標 (r, θ) を用いて

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \tag{5.1}$$

と表すことができます。これで、極座標表示を求めることができました。

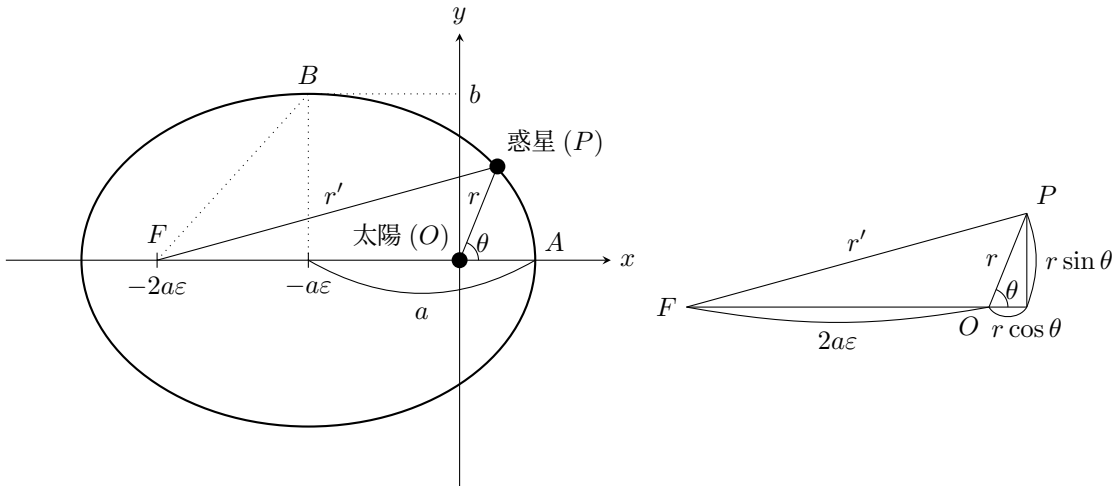


図 5.2

また、この楕円は、単位円を x 軸方向に a 倍して y 軸に b 倍したものであるため、その面積 S は単位円の面積 π を $a \times b$ 倍して、

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \tag{5.2}$$

で与えられます。ここで、 $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ を用いました。(この式は、 $FB = a$ であることを用いて、 F, B , 楕円の中心を頂点とする直角三角形において三平方の定理を適用することで導けます。)

では、本題に入りましょう。

まずは、ケプラーの法則から、惑星の加速度を求めます。ここでは、直交座標より極座標で考えた方が考えやすいので、極座標で考えていきます。直交座標の場合、加速度の x 軸方向成分と y 軸方向成分はそれぞれ、位置 $x(t), y(t)$ を用いて、

$$a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}$$

によって与えられますが、極座標の場合、加速度の動径方向成分と回転方向成分はそれぞれ、 $r(t), \theta(t)$ を用いて、

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (5.3)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (5.4)$$

で与えられます。(導出は少し長くなるので割愛します。気になる方は、「極座標 加速度 導出」などと調べてみてください。)

この加速度の極座標成分をケプラーの法則を用いて、計算していきます。

まず、ケプラーの第2法則を用いて a_θ を求めます。

図 5.3 を見るとわかる通り、惑星の動径(惑星と太陽を結ぶ線分)が微小時間 Δt に掃く扇形は三角形に限りなく近くなるので、面積は(底辺 \times 高さ $/ 2$) で与えられます。なので、微小時間の角度変化を $\Delta\theta$ とすると、底辺は r 、高さは扇形の弧の長さ $r\Delta\theta$ と等しいとみなせるので、扇形の面積 Δs は、

$$\Delta s \approx \frac{r \times r\Delta\theta}{2}$$

となります。よって面積速度は、

$$v_S \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (5.5)$$

と表されます。よって、面積速度の時間変化は、

$$\frac{dv_S}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr^2}{dt} \dot{\theta} + r^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})$$

と計算できます。これには、回転方向の加速度の式 (5.4) を代入でき、

$$\frac{dv_S}{dt} = \frac{r}{2} a_\theta$$

と変形できます。ここで、ケプラーの第2法則から、面積速度は一定、すなわち面積速度の時間変化は0だから、

$$\frac{dv_S}{dt} = 0$$

したがって、 $0 = \frac{r}{2} a_\theta$ となり、

$$a_\theta = 0$$

が導かれます。つまり、「惑星は太陽に対して垂直な回転(公転)方向には加速されていない」ということが分かりました。

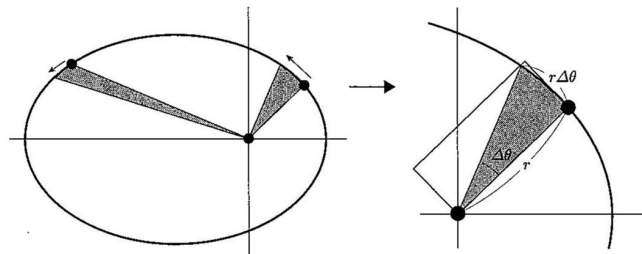


図 5.3

また、面積速度一定より、「楕円軌道の面積 = 面積速度 × 周期」が成り立つので、楕円の面積を S 、惑星の公転周期を T とすると、

$$v_S = \frac{S}{T}$$

これに、式 (5.5) と式 (5.2) を代入して、

$$\frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}$$

よって、 $\alpha = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}$ とおくことで、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha}{r^2} \tag{5.6}$$

と表すことができます。これは、惑星の公転角速度 $\dot{\theta}$ は太陽からの距離 r の2乗に反比例するということを意味し、 a_r を求める際に用います。

つぎに、ケプラーの第1, 3法則を用いて、 a_r を求めます。動径方向の加速度の式 (5.3) の、

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

を計算していきましょう。

まず、第一項 \ddot{r} を求めるにあたって、 \dot{r} を変形していきます。

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

ここで、式 (5.6) を用いました。また、

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

を用いると、

$$\dot{r} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\alpha \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

と変形できます。よって、この式と、式 (5.6) を用いることで、

$$\ddot{r} \equiv \frac{d}{dt} \dot{r} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \dot{r} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(-\alpha \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

が得られます。

この式を式 (5.3) の第一項に代入し、第二項に式 (5.6) を代入すると、

$$a_r = -\left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - r \left(\frac{\alpha}{r^2} \right)^2 = -\left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \tag{5.7}$$

となります。ここで、第1法則より、軌道は楕円であるから、式 (5.1) より、

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \tag{5.8}$$

これを θ で二階微分すると、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \right) \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{-\varepsilon \sin \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \right) = -\frac{\varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \tag{5.9}$$

が成り立ちます。そして、式 (5.8)、式 (5.9) を式 (5.7) に代入することで、動径方向の加速度は、

$$a_r = -\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \left(-\frac{\varepsilon \cos \theta}{a(1-\varepsilon^2)} + \frac{1+\varepsilon \cos \theta}{a(1-\varepsilon^2)} \right) = -\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}$$

となり、この α を $\frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}$ に戻してやることで、

$$a_r = -4\pi^2 \left(\frac{a^3}{T^2} \right) \frac{1}{r^2} \quad (5.10)$$

となります。

ここで、第3法則（公転周期 T の2乗は、軌道の長半径 a の3乗に比例）により、任意の惑星において、式 (5.10) のなかの $\frac{a^3}{T^2}$ は一定であるから、

$$H \equiv \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

とおくと、 H は異なる惑星の間でも共通した数となります。よって加速度は、

$$a_r = -\frac{H}{r^2}$$

と書き換えられ、加速度の動径方向成分を求めることができました。この結果から、「惑星は太陽の方向（向心方向）に向心加速度を持っており、その大きさは太陽までの距離の2乗に反比例している」ということ、「向心加速度の係数は惑星によらずに共通している」ということが分かりました。

さて、これで惑星の加速度が求まりました。惑星が向心加速度を持っているということは、 $F = ma$ より、太陽が惑星に引力を及ぼしている、すなわち惑星は太陽に引かれているということです。その引力 F は惑星の質量を m_1 とおくと、

$$F = m_1 a_r = m_1 \frac{H}{r^2}$$

となります。次に作用反作用の法則により、惑星が太陽に力 F で引かれているなら、太陽も惑星に力 F で引かれていることになるので、この力 F は太陽の質量 m_2 にも比例しているはずです。よって、新たに比例定数 $G = \frac{H}{m_2}$ とおくと、

$$F = m_1 \frac{H}{r^2} = m_1 m_2 \frac{H}{m_2} \frac{1}{r^2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

これで、太陽とその周りをまわる惑星の間には $F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$ の引力が働くことが導かれました。そして、ニュートンは（リンゴが落ちるのを見て??）この引力と同じ形の力がすべての物体の間に働くと考え、以下の万有引力の法則を発見しました。

万有引力の法則

2つの物体の間には、質量の積に比例し、距離の2乗に反比例する万有引力 F が働く。

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

この係数 G は万有引力定数とよばれ、実験室内でさまざまな物体間にはたらく力を計測することを通して普遍定数であることが確認されており、その値は、

$$G \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

と測定されています。

このように、惑星の観測記録から得られたケプラーの法則を数学的に解析することで、ニュートンは万有引力の法則を発想し、その法則がまた実験によって確かめられるといった理論と観測・実験の相互関係は物理の大きな魅力の一つだと思います。これを読んで物理に少しでも興味を持ってもらえたら幸いです。

ここまでお読みいただき本当にありがとうございました。

(82 回生 S.S.)

参考文献

- [1] 篠本滋・坂口英継, 『基幹講座 物理学 力学』, 東京図書, 2013
-

6 新高講義

6.1 はじめに

新高講義では、高校から新しく入ってきた新高生を対象に、学部 1 年程度の力学と電磁気学を一通り扱いました。ここではその中でも、古典電磁気学の究極的な到達点のひとつであるジェフィメンコ方程式について紹介していきたいと思います。

6.2 ジェフィメンコ方程式と導出の概要

電磁場は、過去の電荷と電流によって生み出されます。なぜなら、電荷と電流による情報は有限の速さで伝わるからです。実際、電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ と電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ が与えられたとき、これらが作る電磁場は次のようになります。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t_r} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t_r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3r' \quad (6.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t_r} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] d^3r' \quad (6.2)$$

ただし、遅延時間 t_r は $t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ で定義され、 V は全空間です。これらはジェフィメンコ方程式と呼ばれ、クーロンの法則とビオ・サバルの法則を時間依存の場合へ拡張した形になっています。詳しい物理的意味はいったん後回しにして、以下では導出の概要を示していきます。

まず、関係式 $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を満たす電磁ポテンシャル (ローレンツゲージ) をとります (このような (ϕ, \mathbf{A}) の存在は、ゲージ変換の自由度を用いて証明できます)。このとき、初等計

算により、マクスウェル方程式は次の形にまとまります。

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (6.3)$$

(6.3) は線形な偏微分方程式であり、グリーン関数を用いて特殊解を求めることができます。結果のみ示すと

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (6.4)$$

となります。これらはローレンツゲージになっており、遅延ポテンシャルと呼ばれます*1。

あとは、(6.4) を電磁ポテンシャルの定義式 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ に代入することで、目標の (6.1), (6.2) を示すことができます。計算の途中過程はかなり面倒で、物理的にあまり本質的ではないので省略します。

6.3 マクスウェル方程式との関係

ここで、ジェフィメンコ方程式はマクスウェル方程式を内包するものではないことに注意しましょう。(6.1), (6.2) は電磁場の源 ρ, \mathbf{j} の遅延作用を陽に表すので、マクスウェル方程式を超える法則という印象を与えるかもしれません。しかし、(6.4) はマクスウェル方程式から得られる特殊解のひとつであり、全ての解を表すわけではないのです。

実際、ジェフィメンコ方程式に $\rho = \mathbf{j} = 0$ を代入すると $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ となってしまいます。つまり電磁波のような、電荷や電流を伴わない（非自明な）自由場を記述することができません。

さらに、ジェフィメンコ方程式は任意の $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ に対して定義できるので、電荷保存則を満たさないものも代入できてしまいますが、これらは物理的な解となりません。これらはマクスウェル方程式と本質的に異なる点であり、電磁気学の基本原理はやはりマクスウェル方程式であることがわかります。マクスウェル方程式は線形微分方程式なので、ジェフィメンコ方程式に自由場を加えた形で一般解が与えられ、それは無数に存在します。

6.4 写像としてのマクスウェル方程式

ここでは、ジェフィメンコ方程式がマクスウェル方程式のどのような解に対応するのを探ります。

私が初めてマクスウェル方程式を学んだとき、「これだけで電磁場が一意に定まるのか？」という疑問をもちました。実際、マクスウェル方程式は微分方程式であり、解の一意性を担保するには適切な初期条件や境界条件が必要になります。結論から述べると、マクスウェル方程式は以下のような写像 M を与えます*2。

$$M: (\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0), \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)) \mapsto (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (6.5)$$

つまり、 $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ に加えて初期条件 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ を与えると、マクスウェル方程式に従って電磁場が時間発展し、その結果は任意の t に対して一意だということです。

*1 実際には、 t_r の符号を変えた先進ポテンシャルも解となりますが、物理的意味が明瞭でないためここでは扱いません。先進ポテンシャルは、遅延ポテンシャルに自由場の成分を加えて表すことができます。

*2 もちろん、初期値 $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ はマクスウェル方程式と整合している必要があります。

この事実の証明は、次のポインティングの定理によって行われます*3。

ポインティングの定理

電磁場のエネルギー密度を $u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$ 、エネルギー流（ポインティングベクトル）を $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ で表すと、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \int_V u d^3r = - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r \quad (6.6)$$

以下、これを用いて写像 (6.5) がきちんと定義できることを示します。マクスウェル方程式の2解 $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$, $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ が等しい初期値をもつとき、両者が等しいことを示せば十分です。このとき $\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}' \equiv \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ は自由場なので、ポインティングの定理より

$$\frac{d}{dt} \int_V u d^3r = - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.7)$$

であり、 $r \rightarrow \infty$ での減衰を仮定すると右辺は表面項として落とせます*4。よって、 $t = 0$ の全エネルギーについて $\int_V u(\mathbf{r}, 0) d^3r = 0$ となることに注意すると、任意の t に対して $\int_V u(\mathbf{r}, t) d^3r = 0$ となることがわかります。したがって、 u の定義式の形より、常に $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ が成り立ちます。

ジェフィメンコ方程式 (6.1), (6.2) は、マクスウェル方程式に条件 $\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ ($t < 0$), $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = 0$ を課して得られる特殊解です。初期時間より過去の ρ, \mathbf{j} を 0 とすることは、自由場を排除することに対応します。

ジェフィメンコ方程式は、一見解けそうもないマクスウェル方程式の解が明示的な積分の形で与えられるという点で、とてもおもしろいですね。これは数学的に興味深いだけでなく、古典電磁気学の最終目標である「電荷と電流から電磁場の姿を明らかにする」というテーマに対する、美しく明瞭な集大成とも言えます。

6.5 マクスウェル方程式の正確な解釈

最後に、マクスウェル方程式の因果関係を、ジェフィメンコ方程式の観点から考え直してみましよう。

例として、積分形のファラデーの法則 $\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ を考えます。この式はしばしば「磁束の変化が電場の循環を生み出す」と表現されます。このような表現は直感的理解において非常にわかりやすく、実際に私もこの標語に何度も助けられた経験がありますが、因果律に踏み込んで考えてみると矛盾が見えてきます。なぜなら、ジェフィメンコ方程式が示すように、電磁場を生み出すのは電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} だけであり、磁場が直接電場を生み出すわけではないからです。何より重要なのは、ファラデーの法則は、等しい時刻の量を異なる場所で積分したものを等号で結んだ関係式であるという点です。もしこの両辺が直接的な因果関係で結ば

*3 発散定理とマクスウェル方程式を用いて右辺を計算すると示せます。詳しい計算過程は省きます。

*4 この仮定は自由電磁波の場合には使えません。写像 (6.5) がきちんと定義されるには、物理量が無限遠で減衰することが必要です。現実的には、有限の分布を考える限り、この仮定を課しても問題はないです。

れているならば、その影響は光速を超える無限の速さで伝わることになり、相対論の基本原則である因果律に矛盾してしまいます。また、残りのマクスウェル方程式に対しても全く同様のことが言えます。同時刻の量を等号で結んでいる以上、マクスウェル方程式からは直接的な因果関係が見えないのです。

ジェフィメンコ方程式ではどうでしょう。遅延時刻の定義 $t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ からわかるように、 ρ, \mathbf{j} が観測点 \mathbf{r} の電磁場に与える情報は、必ず有限の速さ c で伝播します。電荷と電流だけが電磁場を生み出すという本質的な事実を、その遅延作用も含めてここまで明瞭に表す数式は他にないでしょう。この因果律の明瞭さこそが、ジェフィメンコ方程式がもつ、マクスウェル方程式に対する解釈上の優位性です。

要するに、(自由場を除く)電磁場はジェフィメンコ方程式に従って ρ, \mathbf{j} のみから作り出され、その結果として満たされる関係式がマクスウェル方程式なのです。マクスウェル方程式は、電磁場の直接的な因果関係を表す式ではなく、電磁場が満たす局所的な関係式と解釈されるべき、ということです。

6.6 おわりに

いかがでしたか？ ジェフィメンコ方程式は、マクスウェル方程式の初期値問題の解を明示的に与えるのと同時に、因果律に関する解釈を正確に表現します。式が複雑でかっこいいのも相まって、個人的に結構お気に入りの式です。

最後まで読んでくれてありがとうございました！

(79 回生 K.R.)

参考文献

- [1] 小宮山進・竹川敦、『マクスウェル方程式から始める電磁気学』、裳華房、2022
- [2] 中村哲・須藤彰三、『電磁気学』、朝倉書店、2010
- [3] 砂川重信、『理論電磁気学』、紀伊國屋書店、1999
- [4] <http://www.sci-museum.kita.osaka.jp/~saito/job/paper/jef-maxw-rev.pdf>

7 力学ゼミ

7.1 はじめに

昨年度行った力学ゼミの活動紹介をしたいと思います。このゼミでは主にランダウ、リフシツによる『力学』および、須藤靖による『解析力学・量子論』を読み進めてきました。この記事では、最小作用の原理から出発し、オイラー–ラグランジュ方程式を導いた後、種々の保存則の導出をしていきます。

7.2 ラグランジュ形式とは

高校や大学の初年級で習う力学は、ニュートンの運動方程式から出発すると思います。そこでは質量 m_i 、位置ベクトル \mathbf{r}_i 、力 \mathbf{F}_i ($i = 1, \dots, N$) として、 i 番目の質点が次の運動方程式に従います。

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i$$

解析力学では、これを一般化して以下のように定式化します。

力学系を指定する一般化座標とその時間微分を $\{q^k\}, \{\dot{q}^k\}$ ($k = 1, \dots, K$) とします。このとき、ラングランジアンなる量 $L = L(q, \dot{q})$ に対する、以下のオイラー–ラグランジュ方程式 (以下、ラグランジュ方程式)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$$

が力学系の時間発展を記述するというのが、ラグランジュ形式です。

7.3 最小作用の原理からラグランジュ方程式へ

では、ラグランジュ方程式を導出しましょう。出発点となるのは、以下の最小作用の原理です。

最小作用の原理

物理系は、ラグランジアンと呼ばれる、座標とその時間微分 (および時間) の関数 $L = L(q, \dot{q}, t)$ で特徴づけられる。その系が、時刻 $t = t_A$ に $q = q(t_A)$ 、時刻 $t = t_B$ に $q = q(t_B)$ の位置にあるものとする。時刻 t ($t_A < t < t_B$) においてこの系は、作用と呼ばれる次の積分：

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt$$

が最小値をとるような経路 $q = q(t)$ を運動する。

この原理はすなわち、 $q(t_A)$ と $q(t_B)$ を結ぶ無数に存在する経路のうち、 S を最小にするような経路が存在することを意味しています。このとき $q(t)$ が満たすべき微分方程式を以下の変分法を用いて求めてみましょう。

S を最小にする経路 $q(t)$ から少しずれた経路を $q(t) + \delta q(t)$ とし、それに対応する作用を $S + \delta S$ とします。(この δS を q に対する変分と呼びます) $\delta q(t)$, $\delta \dot{q}(t)$ の一次の項までに対応した S の変分を計算すると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_A}^{t_B} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt \\ &\approx \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \end{aligned}$$

ここで、第二項を部分積分すると、

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

となります。条件より、

$$\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0$$

ですので、第一項は 0 となります。 S が停留値を持つための条件は、 $\delta S = 0$ です*5。よって第二項の被積分関数が 0 であることが必要で、すなわち、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

となり、ラグランジュ方程式に帰着できます。一般に多自由度の場合には、 q, \dot{q} をそれぞれ $\{q^k\}, \{\dot{q}^k\}$ ($k = 1, \dots, K$) に置き換えることで、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$$

とします。

また、 $\Lambda(q, t)$ を任意関数として、この関数の時間に関する全微分を付け加えたラグランジアンに対応する作用 S' は、

$$S' = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\Lambda}{dt} dt = S + \Lambda(q(t_B), t_B) - \Lambda(q(t_A), t_A)$$

よって、 S' と S は定数分の違いしかなく、ラグランジュ方程式に変更を及ぼしません。したがって、ラグランジアンには時間の全微分で表される関数を付け加える自由度があることがわかります。

7.4 ラグランジアンの形の決定

まず質点が一つしかない系を考えます。座標系として、慣性系を選べば、どの時刻から運動が始まり、どの位置から運動を見ているかというのは特別な意味を持ちません。したがってラグランジアンは速度 \mathbf{v} のみに依存していると考えられます。加え、空間の向き自体にも特別な意味はないので、 \mathbf{v} ではなく、その大きさ $|\mathbf{v}|$ のみの関数であることもわかるので

$$L = L(|\mathbf{v}|^2)$$

となります。ラグランジュ方程式より、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

よって

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = (\mathbf{v} \text{ のみに依存する関数}) = \text{定数}$$

であることがわかり、 \mathbf{v} が定数であるという結論を得ます。これがいわゆる慣性の法則ですね。

次に、 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ (\mathbf{V} は微量) として、この時のラグランジアンを一次の項まで \mathbf{V} について展開すると、

$$L'(|\mathbf{v}'|^2) \approx L(|\mathbf{v}|^2) - \frac{\partial L}{\partial |\mathbf{v}|^2} \times 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} = L(|\mathbf{v}|^2) - 2 \frac{\partial L}{\partial |\mathbf{v}|^2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})$$

*5 本来は、最小値をとる条件を調べる必要がありますが、その議論は少々煩雑ですので、ここではしません。今回の結論を得るには停留条件で十分です。

ガリレイ変換による不変性から、 L' と L は同じラグランジュ方程式を与えなければならないので、第二項は時間の全微分であることが必要です。したがって、

$$\frac{\partial L}{\partial |\mathbf{v}|^2} = \text{定数}$$

であり、一般にこの定数を $\frac{1}{2}m$ として、

$$L = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$$

となります。孤立系で複数の質点が相互作用をしあう系のラグランジアンは、位置に依存する関数を加えることで表現されます。この関数を $U(\mathbf{r})$ とし、系のラグランジアンは、質点の数を N とすると、

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a v_a^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$$

となります。この T は、運動エネルギーに、 U はポテンシャルエネルギーに対応します。

7.5 対称性と保存則

対称性を持つ力学系には、必ず運動を通して不変な量、あるいは運動の積分と呼ばれる量が存在します。以下では、時空の持つ3つの対称性から、それぞれに対応する保存則を導きます。

時間の一様性とエネルギー保存則

時間の原点、すなわち、運動の始まりとみなす時刻は任意に選ぶことができます。このことを、時間の並進対称性あるいは時間の一様性と呼びます。このときラグランジアンは時間に陽に依らないので、 $L = L(q, \dot{q})$ と言い換えられます。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^K \dot{q}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \end{aligned}$$

ここで、

$$p^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$$

とすると、

$$H(q, p) \equiv \sum_{k=1}^K p^k \dot{q}^k - L$$

が運動の積分となります。これはハミルトニアンと呼ばれます。また、前述の議論より、 $L = T - U$ であり、 U は \dot{q} に依存しないことに注意すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}$$

T は速度の二次関数であるので、同次関数についてのオイラーの定理から、

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k = 2T$$

したがって、

$$H = 2T - L = T + U$$

となり、この結果は、まさにエネルギー保存則です。

空間の一様性と運動量保存則

空間も時間と同様に一様性を持ちます。つまり、平行移動に対して物理法則が不変であるという事です。位置 \mathbf{r} から、微小量 $\delta \mathbf{r}$ だけ平行移動した時のラグランジアンを $L + \delta L$ とすると

$$\delta L = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a$$

となります。空間の一様性から、この $\delta \phi$ は 0 となります。 $\delta \mathbf{r}_a$ は任意なので、

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0$$

が導かれます。ラグランジュ方程式より、

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0$$

であるから、

$$P_{\text{tot}} \equiv \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$$

が運動の積分となります。自由粒子の系においては、 $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$ であり、この結果が運動量保存則を示しているのがわかります。

空間の等方性と角運動量保存則

最後に用いる対称性が空間の等方性です。空間の回転に対して物理法則が不変であることを意味しています。ベクトル $\delta \phi$ を回転軸として、その周りに $|\delta \phi|$ の角度だけ回転させる操作を、 $\delta \phi$ に対する回転移動とします。この回転に対して、位置ベクトル、速度ベクトルは

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \mathbf{r} = \mathbf{r} + (\delta \phi \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} = \mathbf{v} + (\delta \phi \times \mathbf{v})$$

となるので、ラグランジアンは

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta \mathbf{v}_a \right) = \sum_{a=1}^N \left[\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} \cdot (\delta \phi \times \mathbf{r}_a) + \mathbf{p}_a \cdot (\delta \phi \times \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}) \right] \\ &= \delta \phi \cdot \sum_{a=1}^N \left(\mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \mathbf{p}_a \right) = \delta \phi \cdot \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N (\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a) \end{aligned}$$

と変化します。等方性から任意の $\delta\phi$ に対して、 $\delta L = 0$ となるので、

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} \equiv \sum_{a=1}^N (\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a)$$

が運動の積分となり、これがいわゆる角運動量保存則ですね。

このように、対称性を利用することで、保存則を導くことができます。

ネーターの定理

最後におまけとして、対称性と運動の積分を結びつける「ネーターの定理」と呼ばれる定理を紹介します。一般座標 q に対して、あるパラメータ s で記述される変換 $q(s)$, $\dot{q}(s)$ を考えます。 $(q(0) = q, \dot{q}(0) = \dot{q})$ が成り立つものとし、ラグランジアンがこの変換に対して不変である条件は、

$$\frac{dL(q(s), \dot{q}(s))}{ds} = \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial q(s)} \frac{dq(s)}{ds} + \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial \dot{q}(s)} \frac{d\dot{q}(s)}{ds} = 0$$

特に、 $s \rightarrow 0$ の極限を考えると、

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right) \right|_{s=0} \end{aligned}$$

より、

$$I \equiv \sum_{k=1}^K \left(\left. \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \right)$$

が運動の積分となります。よって $q(s)$ の形を色々変えることで、種々の保存則を導くことができます。

このように、解析力学では、ニュートン力学をより一般的になるように再構築しています。今回扱ったのはまだまださわりの部分ですが、この学問がどのようなものなのかなんとなくでもわかっただけなら幸いです。最後まで読んでいただき、ありがとうございました！

(79 回生 H.A.)

参考文献

- [1] 須藤靖, 『解析力学・量子論』, 東京大学出版会, 2019
- [2] ランダウ・リフシッツ, 『力学』, 広重徹・水戸巖 訳, 東京図書, 1974

第3部

寄稿記事

ここでは、この部誌に部員から寄せられた記事を紹介していきます。それぞれの部員がお気に入りの物理現象や理論について解説しているので、ぜひお楽しみください。

.....

8 電磁気学小ネタ

8.1 はじめに

本稿では、筆者が日頃行っている物理の勉強の一部として電磁気学の小ネタをいくつか簡単に紹介する。内容の順序は必ずしも体系的ではなく、思いついた順に書いている部分もあるが、その点についてはご了承ください。

基本的には筆者自身の理解を整理する目的で書いているため、読者にとっては参考程度の内容になるかもしれない。また、高校物理の内容を基礎としつつも、一部には高校範囲を少し超える話題も含まれている。

8.2 ビオ・サバールの法則

電流が作る磁場を与える基本法則として、ビオ・サバールの法則がある。これはクーロンの法則が電場を与えるのに対応して、電流要素が作る磁場を記述する法則である。

電流 I が流れる微小な導線要素 $d\ell$ を考える。この電流要素が位置ベクトル \mathbf{r} だけ離れた点に作る磁場 $d\mathbf{B}$ は

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

で与えられる。ここで $\hat{\mathbf{r}}$ は電流要素から観測点へ向かう単位ベクトルである。

したがって、全ての電流要素について積分することで、磁場は

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

と表される。

この式からわかるように、磁場の向きは $d\ell$ と \mathbf{r} の外積で決まり、右ねじの法則に従う。

ビオ・サバルの法則は、直線電流や円形電流が作る磁場を求める際に基本となる法則であり、電磁気学における重要な出発点の一つである。なお、ビオ・サバルの法則はアンペールの法則より原理的である。というのも仮想的な電流素片を導入しているからである。

8.3 双極子ポテンシャル

電荷が互いに近接して正負の対を成している場合、その電荷分布はしばしば双極子として扱うことができる。双極子は電磁気学において基本的な概念の一つであり、物質中の電氣的性質を理解する際にも重要な役割を果たす。

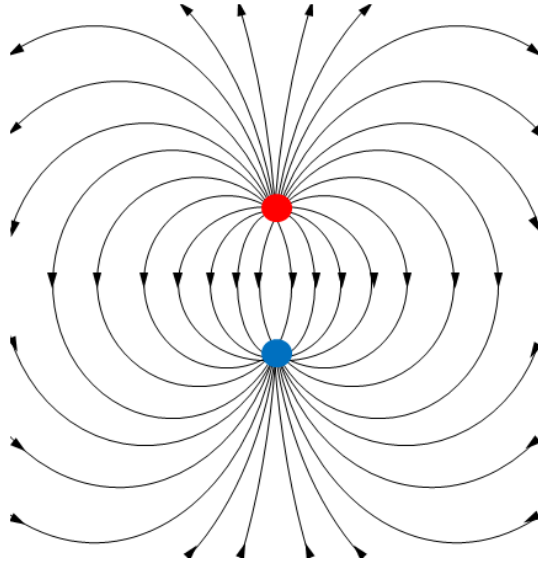


図 8.1 双極子の作る場

電荷 $+q$ と $-q$ が距離 d だけ離れて存在する系を電気双極子という。このとき双極子モーメント \mathbf{p} は

$$\mathbf{p} = qd \hat{z}$$

で定義される（ここでは双極子が z 軸方向を向いているとする）。

双極子の中心から距離 r の点におけるポテンシャルを求める。観測点を極座標 (r, θ) で表すと、それぞれの電荷までの距離は

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp rd \cos \theta}$$

となる。

したがってポテンシャルは

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

で与えられる。

ここで $r \gg d$ の場合を考え、余弦定理の式をテイラー展開すると

$$r_{\pm} \simeq r \mp \frac{d}{2} \cos \theta$$

となる。

さらに

$$\frac{1}{r \pm a} \simeq \frac{1}{r} \mp \frac{a}{r^2}$$

を用いると

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \simeq \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

が得られる。

したがって双極子ポテンシャルは

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

となる。

電場の動径成分と接線成分

電場はポテンシャルの勾配

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

で与えられる。

球座標系では勾配は

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

である。

まず動径方向の微分を計算すると

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

したがって動径成分は

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

となる。

次に角度方向の微分を計算すると

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^2}$$

したがって接線成分は

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

となる。

以上より双極子電場は

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

と表される。

8.4 分極

誘電体に電場を加えると、物質内部では正電荷と負電荷がわずかにずれ、物質全体として電気双極子が形成される。この現象を分極という。

分極を考える際には、次の二つの見方が重要である。

- 物質内部に多数の電気双極子が存在すると考える立場
- 分極によって物体の両端に電荷が現れると考える立場

分極ベクトルを \mathbf{P} とすると、電束密度 \mathbf{D} は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

と定義される。この量を導入することで、誘電体を含む電磁気学の問題を扱いやすくなる。

分極した誘電体中の球形空洞の電場

一様に分極した誘電体を考える。分極ベクトルを \mathbf{P} とする。この誘電体の内部に半径 a の球形の空洞を作ったとき、空洞の中心に生じる電場を求める。

一様分極している場合、体積束縛電荷は

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

で与えられるが、 \mathbf{P} が一定であるため

$$\rho_b = 0$$

となる。したがって電荷は表面束縛電荷のみ存在する。

束縛表面電荷密度は

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

である。空洞の表面では外向き法線は球の中心に向かうため、

$$\sigma_b = -P \cos \theta$$

となる（ここで θ は \mathbf{P} と位置ベクトルのなす角である）。

次に球の中心に作られる電場を求める。クーロンの法則より、微小表面要素 dS による電場は

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_b dS}{a^2} (-\hat{r})$$

である。ここで $-\hat{r}$ は表面から中心へ向かう単位ベクトルである。

球面上の面素は

$$dS = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

である。

対称性より電場は \mathbf{P} 方向のみ成分を持つ。したがってその成分のみを取り出すと

$$dE_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_b}{a^2} \cos \theta \, dS$$

となる。

$\sigma_b = -P \cos \theta$ を代入すると

$$dE_P = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

である。

これを球面全体で積分すると

$$E_P = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

となる。

角度積分は

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{3}$$

であるから、

$$E_P = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} (2\pi) \left(\frac{2}{3}\right)$$

となる。

したがって空洞の中心に生じる電場は

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

となる。

すなわち、球形空洞内部では分極ベクトルと反対向きの一様電場が生じる。

8.5 磁気

磁気の場合も同様に

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}$$

で \mathbf{B} を再定義する。なお電気の場合は述べなかったが、これと高校物理の

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

は何が違うのか。磁石を考えてほしい。磁石の真ん中では磁場が 0 なので磁束密度も 0 となるはずである。しかし再定義した磁束密度は 0 でない。分極成分が生きてくる。電気の場合と同様に双極子を考えることもできる。

磁気ヒステリシス

強磁性体に外部磁場 \mathbf{H} を加えると、物質内部の磁化 \mathbf{M} が変化する。しかしこの磁化は外部磁場に対して単純に比例するわけではなく、過去にどのような磁場を受けてきたかに依存する。このような履歴依存の現象をヒステリシスという。

強磁性体では、磁場を増加させていくと磁化は次第に大きくなり、やがて飽和磁化に達する。この状態から磁場を減少させても、磁化は同じ経路をたどって元に戻るわけではない。

磁場を $H = 0$ に戻しても磁化はゼロにはならず、ある有限の値が残る。この磁化を残留磁化 (remanent magnetization) という。さらに逆向きの磁場を加えていくと、ある値の磁場で磁化がゼロになる。このとき必要な磁場の大きさを保磁力 (coercive field) という。

磁場をさらに大きくすると、磁化は逆向きの飽和状態に達する。この後再び磁場を増減させると、磁化は同じ閉じた曲線を描く。この曲線をヒステリシス曲線という。

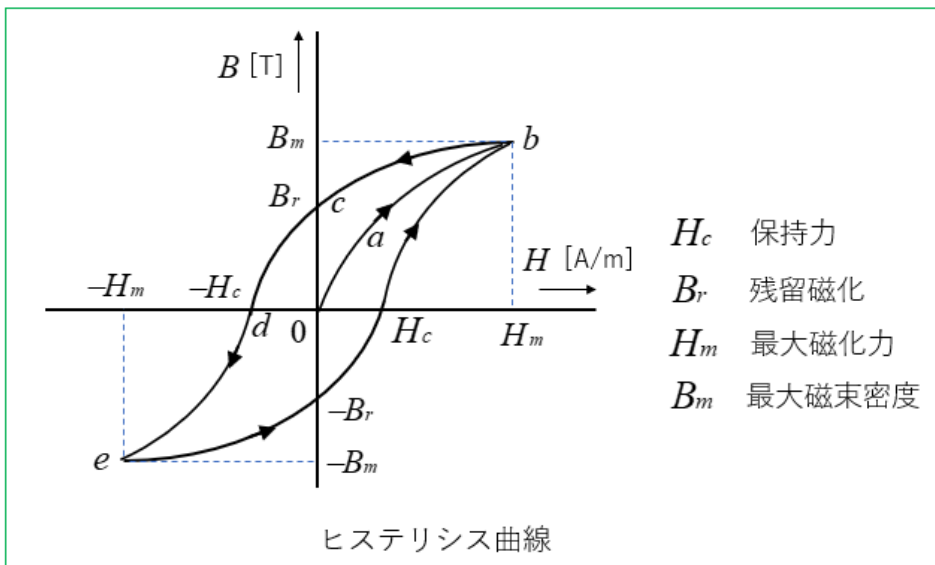


図 8.2 強磁性体のヒステリシス曲線

ヒステリシス曲線で囲まれる面積は、磁化の過程で失われるエネルギーに対応している。これ

は主に磁区構造の変化や磁壁の移動に伴うエネルギー損失によるものであり、変圧器や電磁石などの材料設計において重要な指標となる。

(80 回生 O.T.)

参考文献

- [1] <https://sciencefun.sakura.ne.jp/archives/4778>
 [2] <https://hegtel.com/hysteresis.html>

9 運動方程式はなぜ 2 階なのか

9.1 ニュートンの運動方程式

物理学を学ぶ人が必ず最初に触れるであろう基本法則が、ニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (9.1)$$

です。ご存知の通りこれは位置の 2 階微分方程式ですが、次のような疑問をもったことはないでしょうか。

『運動方程式はなぜ 2 階の微分方程式なのか？ 3 階や 4 階では何かまずいのか？』

(9.1) は 2 階微分方程式なので、ニュートン力学では、2 つの初期条件（たとえば、位置と速度）によって物体の運動が完全に決まります。しかし、もしもこれが 3 階だったなら、加速度の初期値までもが必要となり、物理学の世界は一変していたはずで、この非常に素朴な疑問に、場の量子論からの回答を与えるのがこの記事の目標です。

そもそも、運動方程式 (9.1) はニュートン力学においてどのように解釈されるのでしょうか。これを述べるには、力 \mathbf{F} と質量 m の定義を明らかにする必要があります。しかし、これはなかなか難しい問題です。実際、ニュートンの法則だけから \mathbf{F} と m を独立に定義することは不可能であり、(9.1) が物体の運動を記述する法則なのか、それとも単なる \mathbf{F} の定義式なのか、ニュートン力学の範疇で明確に答えることはできないのです。

このような概念的困難は、ラグランジアン形式に移行することでかなり整理されます。その準備として、次節では時間と空間を統合する相対論的記法について説明します。

9.2 相対論的記法

まず、次の 4 次元時空座標を導入します。

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \quad (9.2)$$

ここで t は時間で、 x, y, z は空間座標です。単位を合わせるために、 t には光速 c がかかっていることに注意しましょう。さらに、無限小だけ離れた時空点 (ct, x, y, z) , $(ct + dt, x + dx, y +$

$dy, z + dz$ の距離 (の2乗) を

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (9.3)$$

で定義します。これは、添字を下につけた4次元時空座標

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) \quad (9.4)$$

を用いると、次のようにシンプルな形で表せます*1。

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (9.5)$$

ただし、計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ で定義しました。つまり、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu = 0) \\ -1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (9.6)$$

です。

ここで、ローレンツ変換を定義します。これは、 Λ^μ_ν をパラメータとして

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (9.7)$$

という形をした変換 (一次変換) で、 ds^2 を不変にするもののことです。 ds^2 を不変にする変換はすべて時空並進とローレンツ変換によって表すことができ、これらをまとめてポアンカレ変換といいます。ちなみに、(9.7) の変換が ds^2 を不変にするためには

$$\eta_{\rho\lambda} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\lambda_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (9.8)$$

が満たされている必要があります (これは式 (9.5) を用いて導けます)。

今からこれを用いて、物理量を分類していきます。まず、スカラー量 S はローレンツ変換の下での不変量として定義されます。つまり、スカラーの変換性は

$$S \longrightarrow S' = S \quad (9.9)$$

です。ベクトル量には、上つき添字をもつ反変ベクトル A^μ と下つき添字をもつ共変ベクトル B_μ の2種類があり、それぞれ

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \quad B_\mu \longrightarrow B'_\mu = B_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \quad (9.10)$$

のように変換します。このように変換性を定義すると、行列がうまく打ち消しあって距離 $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$ が不変になります。同様に、2階のテンソル $T^{\mu\nu}$, T^μ_ν , $T_{\mu\nu}$ の変換性は

$$T^{\mu\nu} \longrightarrow T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\lambda T^{\rho\lambda}, \quad T^\mu_\nu \longrightarrow \Lambda^\mu_\rho T^\rho_\lambda (\Lambda^{-1})^\lambda_\nu, \quad T_{\mu\nu} \longrightarrow T'_{\mu\nu} = T_{\rho\lambda} (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\lambda_\nu \quad (9.11)$$

で定義されます。一見すると複雑ですが、 $T^{\mu\nu}$, T^μ_ν , $T_{\mu\nu}$ を $x^\mu x^\nu$, $x^\mu x_\nu$, $x_\mu x_\nu$ とおきかえて、ベクトルの変換性 (9.10) を使うとこの変換性が自然に導かれます。

*1 アインシュタインの縮約記法を用いています。すなわち、上つきと下つきで同じ添字のペアが現れたとき、その添字に関して (0 から 3 の) 和を取るものとし、和記号を省略します。

なお、計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は2階のテンソルであり、(9.11)に従って

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow \eta'_{\mu\nu} = \eta_{\rho\lambda}(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu \quad (9.12)$$

と変換しますが、(9.8)によると $\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\rho\lambda}(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ と計算できるので、結局 $\eta_{\mu\nu}$ は慣性系によらない定数となります。このような量を不変テンソルといい、クロネッカーのデルタ $\delta^\mu{}_\nu \equiv \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ もその一例です。

最後に、自然単位系について説明します。これは主に素粒子論で使われる単位系で、光速度 c と換算プランク定数 \hbar を1とします。素粒子の速さや角運動量を、相対論と量子論の基本定数である c と \hbar を単位として測ると言う意味で、この単位系は自然であるといえます。以下では自然単位系を採用し、特に断らない限り $c = 1, \hbar = 1$ とします。

自然単位系のもとでは、すべての物理量の次元は質量の冪乗で表されます。なぜなら、[長さ/時間]の次元をもつ c と、[質量 × 長さ²/時間]の次元をもつ \hbar が無次元量に変化するからです。つまり、[長さ] = [時間] = [質量⁻¹] より、独立な次元が質量のみになるのです。たとえば、以下のような質量次元の対応が成り立ちます。

$$[1/\text{長さ}] = [1/\text{時間}] = [\text{運動量}] = [\text{エネルギー}] = [\text{質量}], \quad [\text{速さ}] = [\text{角運動量}] = [1] \quad (9.13)$$

9.3 作用原理と場の理論

古典力学において、物理系の運動はラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ によって記述され、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (9.14)$$

によって運動方程式が得られます。方程式(9.14)は、

$$\text{「作用と呼ばれる量 } S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}, t) \text{ が極値をとるように物体は運動する」}$$

という作用原理から導出されるのでした。つまり、運動方程式を導出するより根本的な法則は、作用原理

$$\delta S = 0 \quad (9.15)$$

だということです(記号 δ は変分を表します)。

先に述べたように、ニュートン力学の枠組みで力と質量を独立に定義することは難しい問題でした。しかし、こちらのラグランジアン形式において、物理系の性質はすべてラグランジアンの中に集約されます。したがって、ラグランジアンに含まれるパラメーター m を直接的に質量と定義できます。たとえば、自由度 n の質点系を記述するラグランジアンは

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - V(q_1, \dots, q_n, t) \quad (9.16)$$

と導入されます(実際、これを(9.14)に代入するとニュートンの方程式 $m\ddot{q} = -\partial V/\partial q_i$ が導出されます^{*2})。 (9.16) のパラメーター m_i を直接質量の定義とする、ということです。一方、ラグ

^{*2} 多くの解析力学の教科書では、(9.16)の形は天下り的に導入されているようです。しかし、文献[6]では時空の対称性などから公理的にラグランジアン の具体形を導出しています。

ランジアン形式における力は、ラグランジアン内のポテンシャル項などから、作用原理という数学的手続きを通じて導出される二次的な量になります。このように、ラグランジアン形式を採用する最大の利点は、

「力というよくわからない概念を第二義的なものに落とし、ラグランジアンだけで系を記述する」というところにあります。

ここまで扱ってきた一般化座標 $q(t)$ は、特定の「点」の運動を記述するものでした。しかし、時空全体に広がる「場」を扱うには、変数を $q(t)$ から場 $\phi(t, x, y, z)$ へ拡張する必要があります。このとき、作用 S はラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ を用いて

$$S = \int dt L(\phi, \partial_\mu \phi) = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (9.17)$$

と表されます*3。(9.17)に作用原理を適用すると、場に対するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (9.18)$$

が得られます。

こうして私たちの課題は、「力 \mathbf{F} を探すこと」から「適切なラグランジアン密度 \mathcal{L} を探すこと」へと完全に移行したのです。

9.4 ラグランジアンの決定

ここでは、ラグランジアン密度がどのような法則によって決まるのかを考察します。文献 [1] にならって、以下に述べる5つの指導原理に基づきラグランジアン密度を決定していきます。以下、実スカラー場 $\phi(x) = \phi(t, x, y, z)$ を例にとって考えます。

1つ目の要請は「不変性」です。たとえば、相対論的不変性は場の量子論の最も基本的な要請であり、作用積分は常にローレンツ変換で不変であることが要求されます。つまり、スカラー量でない $\partial^\mu \phi$ や $\phi \partial_\mu \phi$ といった項が \mathcal{L} に現れることはないといいことです。また、必要に応じて Z_2 変換 $\phi \rightarrow -\phi$ やゲージ変換*4に対する不変性も要求されます。

2つ目は「エルミート性」です。ハミルトニアン演算子がエルミートであるためには、ラグランジアン \mathcal{L} がエルミートである必要があります。これは、エネルギーが実数であることを保証する、量子論の基本的要請の1つです。これにより、 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ に現れる項の係数は実数であることが要求されます。

3つ目は「局所性」です。これは、ラグランジアンが同一時空点の場の関数であることを要請します。たとえば $\phi(x)\phi(x+a)$ といった項は、離れた時空点の瞬間的な相互作用を意味するので、因果律の観点から禁止されるということです。

4つ目は「真空の存在」、すなわちエネルギーに下限が存在することです。これにより、ポテンシャル項 $V(\phi)$ の係数の符号に制限が付きまます。

*3 微分ベクトルは $\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$, $\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$ で定義されます。これらはベクトルの変換性 (9.10) をもちます。

*4 ゲージ場というベクトル場に対して定義される変換です。この記事では、ゲージ場やゲージ変換については扱いません。

これら4つの要請により、ラグランジアン密度の表式は非常に強い制限を受けますが、まだ条件が足りないようです。なぜなら、 ϕ と ∂_μ からなる相対論的不変量は無限に作れるからです。たとえば、 ϕ^6 や $(\partial_\mu \partial^\mu \phi)^2$ のような項を加える余地があります。そこで活躍するのが、最後の指導原理「くりこみ可能性」です。これは、

「ラグランジアン密度に含まれる項の（パラメーターを除いた）質量次元は4以下である」

ことを要請します。この要請の物理的意味については、記事の後半で説明します。

作用積分は角運動量の次元をもつので、自然単位系では無次元となります。よって式(9.16)より、ラグランジアン密度 \mathcal{L} の質量次元は4です。これを式で $[\mathcal{L}] = 4$ と表すことにします。また、次節で議論するクライン・ゴールドン方程式との対応を考えると、スカラー場 ϕ の質量次元は $[\phi] = 1$ となることがわかります。したがって、 ϕ と ∂_μ からなる相対論的不変量のうち、質量次元が4以下のものを書き出すと

$$[\phi] = 1, \quad [\phi^2] = 2, \quad [\phi^3] = [\partial_\mu \partial^\mu \phi] = 3, \quad [\phi^4] = [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] = [\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi] = [\partial_\mu \partial^\mu (\phi^2)] = 4 \quad (9.19)$$

となります（ $[\partial_\mu] = [\partial^\mu] = 1$ に注意です）。

ここまでの議論から、実スカラー場のラグランジアンは一般に

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (9.20)$$

で与えられます。(9.20)の導出について、いくつか注意点を与えておきます。

- 簡単のため、 $\phi \rightarrow -\phi$ の不変性 (Z_2 不変性) を課しました。これにより、(9.19)のうち ϕ , ϕ^3 , $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ がラグランジアンから姿を消します。
- (9.19)のうち、 $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, $\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi$ の項は本質的に同じものと見なせます。なぜなら、両者の差は全微分項 $\partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi)$ であり、これは作用積分に寄与しないからです。実際、4次元の発散定理を用いることで、全微分項の空間積分は無限遠での表面項にもっていかれます。同様に、 $\partial_\mu \partial^\mu (\phi^2)$ も表面項に対応するので(9.20)に含めていません。
- ラグランジアンは定数倍の任意性をもつので、それを利用して運動項 $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ の係数を1/2としています。
- m は質量、 λ は相互作用の強さを表す結合定数です。1/4! の因子は、摂動計算での都合が良いために慣例でつけられています。真空の存在の要請により、 $\lambda > 0$ が保証されます。

注目すべき点は、(9.20)に現れている微分の次数が2であるところです。どうやら、最初に提示した素朴な疑問の答えは、くりこみ可能性に隠されているようです。次節では、(9.20)からニュートンの運動方程式を再導出し、2階微分の起源が(9.20)であることを明らかにします。

9.5 クライン・ゴールドン方程式

これまでの議論から、実スカラー場の作用積分は

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right\} \quad (9.21)$$

で与えられます。詳しい計算過程は省きますが、作用原理を (9.21) に用いて計算すると

$$\delta S[\phi] = 0 \implies \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^2 = 0 \quad (9.22)$$

となります。特に、自己相互作用をしない自由場 ($\lambda = 0$) は、次のクライン・ゴールドン方程式に従います。

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0 \quad (9.23)$$

ここでは、クライン・ゴールドン方程式の非相対論的極限をとってシュレディンガー方程式を導き、そこから冒頭に述べたニュートンの運動方程式を再導出します。

容易にわかるように、クライン・ゴールドン方程式 (9.23) は次の独立な基本解をもちます*5。

$$\phi_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) = N e^{-i(E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (9.24)$$

ここで N は規格化定数で、 \mathbf{p} は任意の3次元定数ベクトルです。エネルギー・運動量演算子が $\hat{H} = i(\partial/\partial t)$, $\hat{p} = -i\nabla$ で与えられたことを思い出すと、この解は次の固有方程式を満たします。

$$\hat{H}\phi_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{p}}\phi_{\mathbf{p}}, \quad \hat{p}\phi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\phi_{\mathbf{p}} \quad (9.25)$$

したがって (9.24) の解は、運動量 \mathbf{p} , エネルギー $E_{\mathbf{p}}$ の粒子を表しています。

ここで非相対論的極限を考えるために、波動関数 $\psi(t, \mathbf{x})$ を

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{imt} \phi(t, \mathbf{x}) \quad (9.26)$$

で定義します。因子 e^{imt} は、 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = m + \mathbf{p}^2/2m + \dots$ から静止エネルギー m を取り除く役割を担います (実際、 $\hat{H}\psi_{\mathbf{p}} \equiv \hat{H}(e^{imt}\phi_{\mathbf{p}}) = (E_{\mathbf{p}} - m)\psi_{\mathbf{p}}$ となります)。 $\phi(t, \mathbf{x}) = e^{-imt}\psi(t, \mathbf{x})$ を用いて (9.23) の左辺を計算すると、

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi = e^{-imt}(\ddot{\psi} - 2im\dot{\psi} - \nabla^2\psi) \quad (9.27)$$

という結果が得られます。非相対論的極限では、静止エネルギーに比べて非相対論的エネルギーは無視できるので、 $|m\psi| \gg |i(\partial\psi/\partial t)|$ となります。これを使うと、(9.27) は

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi &= e^{-imt} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2im\psi \right) - \nabla^2\psi \right\} \\ &\approx e^{-imt} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (-2im\psi) - \nabla^2\psi \right\} \\ &= e^{-imt} (-2im\dot{\psi} - \nabla^2\psi) \end{aligned}$$

と計算できます。したがって、クライン・ゴールドン方程式 (9.23) の非相対論的極限は、波動関数 $\psi(t, \mathbf{x})$ を用いて

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(t, \mathbf{x}) \quad (9.28)$$

*5 実は、(9.24) の指数部分を -1 倍したのも解になっています。これは負エネルギー解に対応し、質量が同じで電荷が逆符号の反粒子を表すものと解釈できます。この記事では、負エネルギー解問題の詳細には触れません。

で与えられます。これは紛れもなく、量子力学で登場するシュレディンガー方程式です。この結果からも、ラグランジアン (9.20) が系を適切に記述することが確認できます。

シュレディンガー方程式 (9.28) は波動関数 $\psi(t, \mathbf{x})$ の時間発展を記述する方程式なので、冒頭で議論したニュートンの運動方程式とはまだ距離があります。そこで、演算子の期待値を取ること、波動関数の粒子的な振る舞いを取り出してみましょう。

波動関数 $\psi(t, \mathbf{x})$ は次のシュレディンガー方程式に従います。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) = \left\{ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(x) \right\} \psi(t, \mathbf{x}) \quad (9.29)$$

ただし、ポテンシャル $V(x)$ をハミルトニアンに加えました。位置の測定結果が $\mathbf{x} \sim \mathbf{x} + d\mathbf{x}$ となる確率は $|\psi(t, \mathbf{x})|^2 d^3x$ で与えられるので、位置の期待値は

$$\overline{\mathbf{x}(t)} = \int d^3x \mathbf{x} |\psi(t, \mathbf{x})|^2 = \int d^3x \psi^*(t, \mathbf{x}) \mathbf{x} \psi(t, \mathbf{x}) \quad (9.30)$$

となります (ψ^* は ψ の複素共役です)。詳しい過程は省きますが、積の微分や部分積分によって $m(d^2/dt^2)\overline{\mathbf{x}(t)}$ という量を計算すると、次の結果が得られます。

$$m \frac{d^2}{dt^2} \overline{\mathbf{x}(t)} = \overline{-\nabla V(x)}, \quad \overline{-\nabla V(x)} = \int d\mathbf{x} \{-\nabla V(x)\} |\psi(t, \mathbf{x})|^2 \quad (9.31)$$

式 (9.31) はエーレンフェストの定理と呼ばれ、波束の中心付近では「加速度=力」が成り立っていることを主張します。この結果は、量子力学は古典力学を包含し、粒子的極限によってシュレディンガー方程式からニュートンの方程式が得られるということを示します。

ここまでの流れをまとめておきましょう。まず、くりこみ可能性などの要請によってラグランジアンから高階微分が姿を消します。すると、実スカラー場のラグランジアンはほぼ一意に決まり、作用原理の結果クライン・ゴールドン方程式が得られます。この方程式の非相対論的極限・粒子的極限を取ることによって、ニュートンの方程式が再現されます。つまり、ニュートンの方程式が2階である理由は、もとを辿ればくりこみ可能性がラグランジアンに質量次元に制限を与えることなのです。次節では、このくりこみ可能性の物理的意味を説明していきます。

9.6 くりこみとは？

ここでは、9.4節で説明したくりこみ可能性の条件、すなわち

「ラグランジアン密度に含まれる項の (パラメーターを除いた) 質量次元は4以下である」

ことの物理的意味を紹介します。数学的なくりこみの手順を解説するのは難しいので、ここでは次元解析による定性的な説明にとどめることにします。

結合定数 g と、質量次元 d をもつ量 \mathcal{O}_d からなる項 $g\mathcal{O}_d$ を考えます。 \mathcal{O}_d の例としては ϕ^2 , $\partial_\mu \partial^\mu \phi$, ϕ^6 などを想像してください。この項がラグランジアン密度 \mathcal{L} に登場するならば、 $[\mathcal{L}] = 4$, $[\mathcal{O}_d] = d$ より

$$[g] = [\mathcal{L}] - [\mathcal{O}_d] = 4 - d \quad (9.32)$$

となります。よって、 $g\mathcal{O}_d$ がくりこみ不可能 ($d > 4$) ならば $[g] < 0$ となります。つまり、くりこみ不可能な相互作用の結合定数の質量次元は負になるということです。

$-d' \equiv [g] < 0$ とします。質量次元 1 をもつパラメータ Λ を導入すると、 $\bar{g} \equiv \Lambda^{d'} g$ は無次元となります。ここで、 Λ は今考えているくりこみ可能な理論が成立する最大のエネルギースケールを表すものとします。 g は質量次元をもっているので、この相互作用に関する実質の摂動展開のパラメータは、 g そのものではなく次の無次元量になります*6。

$$gE^{d'} = \bar{g} \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{d'} \quad (9.33)$$

ここで、 E は粒子のエネルギーなど系の典型的なエネルギースケールを代表したものです。

摂動展開が意味をもつには、展開パラメータが 1 より十分小さい、すなわち

$$\bar{g} \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{d'} \ll 1 \implies E \ll \Lambda \quad (9.34)$$

が必要です。逆に言えば、 $E \sim \Lambda$ となるような系では摂動論が破綻します。つまり、くりこみ不可能な相互作用を摂動として扱えなくなり、くりこみ不可能な相互作用をすべて取り入れた計算が必要になるということです。このようなスケール Λ のことを紫外切断と呼び、くりこみ不可能な項を無視した理論（低エネルギー有効理論）の適用限界のエネルギースケールを与えます。

紫外切断 Λ は、現在私たちが実験で到達可能なエネルギー E と比べて桁違いに大きいと考えられています。このとき、(9.33) の $\bar{g}(E/\Lambda)^{d'}$ はとてつもなく小さな値になります。よって、たとえくりこみ不可能な相互作用の寄与が存在したとしても、小さすぎて私たちの技術では観測できないのです。これが、私たちが観測できる自然法則がくりこみ可能な理論で記述される理由です。

まとめると、くりこみ可能性の条件は、摂動計算への寄与が非常に小さい相互作用項をラグランジアンから取り除く（無視する）役割を担っているということです。高エネルギーの物理が隠れているから、私たちの世界はシンプルに見えるのです。

一方、くりこみ可能性は発散の除去という観点でも重要な意味をもちます。場の量子論において、粒子の相互作用による量子補正を計算しようとするとき、計算結果が無限大に発散してしまうという深刻な問題に直面します。しかし、この発散はラグランジアンに含まれる質量や結合定数を適切に再定義することで相殺でき、有限な物理量を得ることができます。この一連の処方箋をくりこみといいます。先ほど提示したくりこみ可能性の条件は、理論に表れる発散量を有限個のパラメータで除去できることを保証します（くりこみ可能な理論）。くりこみ可能でない理論は、無限個のパラメータを要するので予言能力をもたないとされてきましたが、近年では物理的に意味のある理論として研究が進んでいるようです（フェルミの弱相互作用理論、量子重力理論など）。

9.7 おわりに

いかがでしたか？ 誤った記述などあったかもしれませんが、場の量子論が自然法則の記述において非常に重要な役割を果たしていることが伝わったんじゃないかと思います。

*6 摂動展開とは、相互作用の寄与が小さいと仮定して、自由場の解に量子補正を順次（1次、2次、...）足していく近似計算手法のことです。物理的な寄与の強さを測るには、単位に依存しない純粋な数字で評価するため、展開パラメータは無次元量となります。

さて、この記事ではラグランジアンの相対論的不変性を無条件に要請しましたが、考えてみるとこれは不思議なことです。一体どうして、自然法則は不変性の原理に従うのでしょうか。そもそも物理学はどうして、数学を用いてここまで綺麗に記述できるのでしょうか。どうやら人類は、その答えに未だ誰一人として辿り着いていないようです。わからないことだらけですが、どうしようもなく美しいですね。そんな物理が、私は大好きです。

最後まで読んでくれてありがとうございます！

(79回生 K.R.)

参考文献

- [1] 坂本真人, 『場の量子論 — 不変性と自由場を中心にして —』, 裳華房, 2022
- [2] 坂本真人, 『場の量子論 (II) — ファインマン・グラフとくりこみを中心にして —』, 裳華房, 2023
- [3] 小形正男, 『量子力学』, 裳華房, 2009
- [4] 渡辺悠樹, 『解析力学 — 基礎の基礎から発展的なトピックまで —』, 共立出版, 2024
- [5] 山本義隆・中村孔一, 『解析力学 I』, 朝倉書店, 1998
- [6] ランダウ・リフシッツ, 『力学』, 広重徹・水戸巖 訳, 東京図書, 1974

10 流体としての宇宙 — 一般相対論が描く宇宙のダイナミクス —

10.1 導入

宇宙には、星や銀河といった無数の天体が存在している。それらをすべて追跡して宇宙の進化を記述することは可能だろうか。

仮に銀河系だけを考えても、その中には 1000 億個以上の恒星が存在する。それら一つ一つについて運動方程式を立て、その運動を厳密に追跡することは、たとえスーパーコンピュータを用いたとしても現実的ではない。

それにもかかわらず、現代宇宙論は宇宙全体の進化を非常にシンプルな方程式で記述することに成功している。その鍵となるのが、「宇宙を流体として扱う」という発想である。

すなわち、個々の天体の詳細を捨て、密度や圧力といった平均的な量によって宇宙を記述するのである。この考え方は、統計力学や流体力学における連続体近似と本質的に同じものであり、巨視的な振る舞いを理解するための強力な方法である。

一見すると、星や銀河が離散的に存在する宇宙を流体として扱うことには違和感がある。しかし、十分大きなスケールで平均化を行えば、宇宙は一樣かつ等方な連続体として近似できることが知られている。

本稿では、この「宇宙を流体としてみなす」という立場から、一般相対論に基づく宇宙論の基本的な枠組みを概観する。特に、密度や圧力といった流体的な量がどのように宇宙の膨張を支配するのか、そして圧力が重力源として働くという相対論特有の性質について見ていく。

10.2 流体近似の妥当性

前節では、宇宙全体を流体として扱うという立場を導入した。しかし、星や銀河が離散的に分布している宇宙を連続体として近似することは、一見すると正当化が難しいように思われる。本節では、この流体近似がどのような意味で妥当であるかを考える。

まず重要なのは、観測対象とするスケールである。個々の恒星や銀河のスケールでは、物質分布は明らかに不均一であり、連続体近似は成立しない。しかし、数億光年程度以上の十分大きなスケールで平均化を行うと、宇宙はほぼ一様かつ等方に見えることが知られている。この性質は宇宙論の基本仮定の一つであり、「宇宙原理」と呼ばれる。

このような大局的な視点に立つと、個々の天体の離散性は無視され、物質は連続的に分布するかのよう扱うことができる。この操作は、統計力学や流体力学において分子の詳細な運動を捨て、密度や圧力といった巨視的な量で記述する手法と本質的に同じである。すなわち、宇宙における「流体」とは、実在する連続体というよりも、粗視化によって得られる有効的自由度として理解される。

ここで重要なのは、宇宙における流体近似には大きく分けて二つの意味があるという点である。第一に、粒子同士の相互作用によって局所熱平衡が成立し、その結果として流体的な振舞いが現れる場合であり、これは主に初期宇宙において成立する。第二に、個々の構造を平均化することによって連続体としての有効的な記述が得られる場合であり、現在の宇宙では主にこちらの意味で流体近似が用いられる。

このような一様・等方な宇宙を記述する時空として、フリードマン＝ロバートソン＝ウォーカー（FLRW）計量が用いられる。この計量のもとで、宇宙の時間発展はフリードマン方程式

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (10.1)$$

および加速度方程式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (10.2)$$

によって記述される。

ここで H はハッブルパラメータ、 $a(t)$ はスケール因子であり、 ρ と p はそれぞれ流体のエネルギー密度と圧力である。このとき重要なのは、重力の源が単なる密度 ρ ではなく、圧力を含めた量 $(\rho + 3p)$ によって決まる点である。これは一般相対論に特有の性質であり、後に詳しく議論する。

物質の性質はエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (10.3)$$

によって記述される。ここで u^μ は流体の 4 元速度であり、共動座標系では

$$u^\mu = \delta_0^\mu \quad (10.4)$$

と書ける。

さらに、保存則

$$T^\nu_{\mu;\nu} = 0 \quad (10.5)$$

から、エネルギー保存の式

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (10.6)$$

が得られる。これらの方程式は宇宙の時間発展を記述する基本方程式であり、その詳細な導出については後の節で扱う。

流体近似が成立するための条件をより具体的に理解するために、時間スケールの比較を考える。宇宙の膨張に対応する時間スケール（力学的時間）はハッブルパラメータを用いて

$$\tau_{\text{dyn}} \sim H^{-1} \quad (10.7)$$

と見積もることができる。一方、粒子同士の相互作用によって分布が平衡に達する時間（緩和時間）は反応率 Γ を用いて

$$\tau_{\text{rel}} \sim \Gamma^{-1} \quad (10.8)$$

と書ける。

したがって、 $\Gamma > H$ のときには $\tau_{\text{rel}} < \tau_{\text{dyn}}$ となり、粒子は宇宙膨張より速く相互作用して局所熱平衡を保つ。逆に $\Gamma < H$ の場合には平衡が維持できず、粒子はデカップルする。

この関係を具体的にみるため、初期宇宙を例に考える。放射優勢期には

$$H \simeq 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}} \quad (10.9)$$

であるから、

$$\tau_{\text{dyn}} \sim H^{-1} \quad (10.10)$$

となる。例えば $g_* = 10.75$, $T = 3 \text{ MeV}$ とすると、

$$H \sim 6 \text{ s}^{-1}, \quad \tau_{\text{dyn}} \sim 0.1 \text{ s} \quad (10.11)$$

である。

一方、ニュートリノの弱相互作用率は

$$\Gamma_\nu \sim G_F^2 T^5 \quad (10.12)$$

と書けるので、

$$\tau_{\text{rel}} \sim \Gamma_\nu^{-1} \quad (10.13)$$

である。このとき

$$\tau_{\text{rel}} \sim 10^{-2} \text{ s} \quad (10.14)$$

となり、

$$\tau_{\text{rel}} < \tau_{\text{dyn}} \quad (10.15)$$

が成立する。したがってこの温度ではニュートリノは熱平衡にあり、流体近似がよく成立している。

さらに $\Gamma/H \propto T^3$ であるため、高温の初期宇宙では

$$\tau_{\text{rel}} \ll \tau_{\text{dyn}} \quad (10.16)$$

が強く成立し、流体近似は極めて良い近似となる。

一方で現在の宇宙では状況はより複雑である。十分大きなスケールでは依然として一様・等方性が成り立つため、密度場を連続体として扱うことができ、流体的な記述は有効である。実際、大規模構造の形成や宇宙の平均的な進化はこの近似に基づいて理解されている。

しかし、小さなスケールでは物質は銀河や恒星として離散的に分布しており、粒子間の衝突もほとんど起こらない。特に暗黒物質はほぼ無衝突であるため、その運動は本来ボルツマン方程式によって記述されるべきものである。

より厳密には、このような流体的記述はボルツマン方程式のモーメント展開として導かれるものである。すなわち、分布関数の時間発展を記述するボルツマン方程式から、巨視的量を取出すことで流体方程式が得られる。

以上のように、宇宙における流体近似は、初期宇宙では局所熱平衡に基づく物理的な意味を持ち、現在の宇宙では大規模な平均化によって得られる有効的な記述として理解される。したがって、宇宙を流体として扱うという考え方は、単なる近似にとどまらず、宇宙論の基本構造そのものを支える枠組みとなっている。

10.3 流体としての宇宙とエネルギー運動量テンソル

宇宙を流体として扱うということは、その物質分布を密度や圧力といった巨視的な量によって記述することを意味する。しかし、一般相対論においては、重力の源は単なる質量密度ではなく、エネルギーと運動量のすべてである。したがって、これらを統一的に表す量が必要となる。

その役割を担うのがエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ である。このテンソルは、単位時間・単位面積あたりに流れるエネルギーおよび運動量の流束を表しており、物質の状態を相対論的に記述する基本量である。

宇宙論では、物質はしばしば完全流体 (perfect fluid) として近似される。完全流体とは、粘性や熱伝導を無視でき、圧力が等方的であるような理想化された流体である。宇宙が大規模には一様かつ等方であるという宇宙原理を仮定すると、前節で述べた一様性・等方性の要請から、このような近似は自然であるといえる。

このとき、エネルギー運動量テンソルは対称性の要請 (ローレンツ共変性および等方性) から

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (10.17)$$

という形に制限される。ここで ρ はエネルギー密度、 p は圧力、 u^μ は流体の 4 元速度、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルである。

この表式の物理的意味を理解するために、流体の静止系を考える。この系では

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (10.18)$$

と書けるので、エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (10.19)$$

という対角形になる。

この結果から、各成分の物理的意味が明確になる。時間成分 T_{00} は単位体積あたりのエネルギー密度 ρ を表し、空間成分 T_{ii} は圧力 p に対応する。ここで重要なのは、圧力が単なる「力」ではなく、運動量の流束として現れている点である。すなわち、圧力とは単位面積あたりに輸送される運動量の大きさであり、相対論的にはエネルギーと同様に重力の源として寄与する。

このことは、一般相対論において圧力が重要な役割を果たす理由を示している。後に見るように、宇宙の加速度方程式には $(\rho + 3p)$ という組み合わせが現れ、圧力が重力の強さに直接影響を与える。これはニュートン力学には現れない、相対論特有の性質である。

以上のように、宇宙を流体として扱うということは、その物質分布を完全流体のエネルギー運動量テンソルによって記述することに他ならない。このテンソルをアインシュタイン方程式に代入することで、宇宙の時間発展を記述するフリードマン方程式が導かれる。したがって、エネルギー運動量テンソルは、流体としての宇宙とその幾何を結びつける中心的な役割を担っている。

10.4 宇宙の幾何とフリードマン方程式の導出

前節では、宇宙の物質内容が完全流体のエネルギー運動量テンソルによって記述されることを見た。本節では、これをアインシュタイン方程式に代入することで、宇宙の時間発展を支配する方程式を導く。

宇宙が一様かつ等方であるという仮定は、時空の幾何に強い制約を与える。この対称性を満たす計量として、フリードマン=ロバートソン=ウォーカー（FLRW）計量が知られており、

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (10.20)$$

と書ける。ここで $a(t)$ はスケール因子、 k は空間の曲率を表す定数である。

重力の基本方程式であるアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (10.21)$$

で与えられる。左辺は時空の幾何を表し、右辺は物質のエネルギーと運動量の分布を表す。すなわち、一般相対論では「幾何が物質によって決まり、物質の運動が幾何によって決まる」という関係が成り立っている。

完全流体のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (10.22)$$

を FLRW 計量のもとでアインシュタイン方程式に代入すると、独立な方程式として二つの式が得られる。

まず時間成分 (00 成分) から、

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (10.23)$$

が得られる。これはフリードマン方程式と呼ばれ、宇宙の膨張率がエネルギー密度によって決まることを示している。

次に空間成分（対角成分）から、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (10.24)$$

が得られる。この式は宇宙の加速度を記述しており、密度だけでなく圧力も重力源として働くことを示している。

さらに、エネルギー運動量テンソルの保存則

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0 \quad (10.25)$$

から、

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (10.26)$$

が導かれる。この式はエネルギー保存を表しており、宇宙の膨張に伴うエネルギー密度の変化を記述している。なお、この保存則はアインシュタイン方程式の結果として自動的に満たされるものであり、上の二つのフリードマン方程式と独立ではない。

以上の結果から、一様・等方な宇宙の時間発展は、スケール因子 $a(t)$ 、エネルギー密度 ρ 、圧力 p によって完全に記述されることがわかる。すなわち、宇宙の幾何（左辺）と物質の性質（右辺）がアインシュタイン方程式によって結びつけられており、流体としての宇宙という描像が、そのまま宇宙の力学を決定しているのである。

10.5 流体量としての圧力と宇宙のダイナミクス

前節で導いた加速度方程式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (10.27)$$

から分かるように、宇宙を流体として扱う立場において、そのダイナミクスはエネルギー密度 ρ と圧力 p によって決定される。すなわち、一般相対論においては、重力の源は単なる密度ではなく、圧力を含めた量 $(\rho + 3p)$ によって与えられる。

この結果を理解する鍵は、圧力の物理的意味にある。流体における圧力は単なる力ではなく、単位面積あたりに輸送される運動量、すなわち運動量の流束として解釈される。空間は3次元であるため、この運動量流束の寄与が3方向から加わり、 $(\rho + 3p)$ という形が現れる。これは、圧力が空間の各方向に等しく働くため、3つの空間方向から寄与が加わることに対応している。したがって圧力は、エネルギー密度と同様に重力の源として働く。

流体の性質は、状態方程式

$$p = wp \quad (10.28)$$

によって特徴付けられる。ここで w は状態方程式パラメータであり、流体の力学的性質を決定する。

例えば、 $w = 0$ の場合には圧力は無視でき、流体は非相対論的な物質（ダスト）として振る舞う。このとき重力の源は主に密度 ρ によって与えられる。一方、 $w = 1/3$ の場合には圧力が無視できず、流体は放射として振る舞う。この場合には $(\rho + 3p)$ が大きくなり、より強い重力効果を持つ。さらに、 $w = -1$ の場合には圧力が負となり、 $(\rho + 3p)$ は負の値をとるため、宇宙は加速膨張する。

また、エネルギー保存則

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (10.29)$$

と状態方程式を組み合わせることで、

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (10.30)$$

が得られる。これは、宇宙の膨張に伴って流体のエネルギー密度がどのように変化するかを示している。

以上のように、宇宙の時間発展は、流体として記述された物質の性質、すなわちエネルギー密度と圧力によって決定される。したがって、宇宙を流体として捉えるという立場に立つとき、その進化は流体の状態方程式によって統一的に理解することができる。

10.6 観測から見た流体宇宙論

これまで見てきたように、現代宇宙論では、宇宙を一様・等方な流体として近似し、そのエネルギー密度と圧力によって時間発展を記述する。本節では、この流体的描像が実際の観測とどのように対応しているかを見ていく。

まず、宇宙が大規模に一様かつ等方であるという仮定は、宇宙マイクロ波背景放射（CMB）の観測によって強く支持されている。CMB はビッグバン後およそ 38 万年の宇宙から届く放射であり、その温度ゆらぎは平均温度に対して 10^{-5} 程度と非常に小さい。この事実は、初期宇宙がほぼ一様な状態にあり、連続体としての流体近似がよく成り立っていたことを示している。

しかし同時に、この微小なゆらぎは完全にゼロではない。むしろ、後に銀河や銀河団へと成長する種として重要である。CMB の角度パワースペクトルに見られる音響ピークは、初期宇宙において光子とバリオンが強く結合した流体として振る舞い、重力による圧縮と放射圧による反発のあいだで音波的振動を行っていたことを示している。すなわち、初期宇宙は単に平均的に一様なだけでなく、実際に流体力学的自由度を持つ媒質としてふるまっていたのである。

この初期宇宙の音波振動の痕跡は、現在の銀河分布にもバリオン音響振動（BAO）として残されている。BAO は、大規模構造の中に刻まれた「標準尺」として働き、宇宙膨張の歴史 $a(t)$ やハッブルパラメータ $H(z)$ を観測的に制約する。この意味で、流体近似のもとで導かれた宇宙論的方程式は、初期宇宙の揺らぎから現在の銀河分布に至るまで、観測と直接つながっている。

また、現在の宇宙の平均的なエネルギー収支については、標準的な Λ CDM モデルのもとで、全物質成分が約 30%、ダークエネルギーが約 70% と求められている。ここでいう「全物質成分」には通常のバリオンだけでなく暗黒物質も含まれており、普通の物質はそのうちの一部に過ぎない。したがって、宇宙の大局的なダイナミクスは、日常的な物質だけではなく、暗黒物質やダークエネルギーを含む有効的な流体成分によって支配されていると理解される。

特に重要なのは、**Ia 型超新星**の観測によって、宇宙の膨張が減速ではなく加速していることが明らかになった点である。この結果は、加速度方程式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

に照らせば、 $\rho + 3p < 0$ を満たす成分、すなわち十分に負の圧力を持つ流体の存在を示唆する。最も単純にはこれは宇宙定数に対応し、状態方程式は $w = -1$ で与えられる。

もっとも、ダークエネルギーが本当に厳密な宇宙定数であるかどうかは、現在も観測的に検証が続いている問題である。近年の DESI の結果では、CMB や Ia 型超新星などと組み合わせた解析において、ダークエネルギーの状態方程式が時間とともに変化する可能性を示唆する傾向も報告されている。ただし、現時点でそれが決定的に確立されたとは言えず、標準的な Λ CDM モデルは依然として宇宙論の基準模型である。

以上のように、宇宙の大局的な振る舞いは、一様・等方な流体としての記述によって非常によく説明される。CMB の等方性、音響ピーク、BAO、Ia 型超新星による加速膨張の発見は、いずれも「宇宙を流体として捉える」という立場が単なる数学的便法ではなく、観測的に強く支えられた有効理論であることを示している。ここで重要なのは、これらの観測が、宇宙を流体として扱う理論的枠組みの妥当性を直接検証している点である。同時に、暗黒物質やダークエネルギーの正体という未解決問題は、この流体的描像をさらに深める次の課題となっている。

10.7 まとめ

本稿では、「宇宙を流体として捉える」という立場から、一般相対論に基づく宇宙論の基本的枠組みを概観した。

まず、宇宙は十分大きなスケールで平均化することにより、一様かつ等方な連続体として近似できることを見た。この流体近似は、初期宇宙における局所熱平衡に基づく記述としても、現在の宇宙における大規模構造の平均的な記述としても有効である。

次に、このような宇宙の物質内容は、完全流体のエネルギー運動量テンソルによって記述されることを示した。これにより、密度や圧力といった流体的な量が、一般相対論における重力の源として働くことが明確になる。

さらに、FLRW 計量のもとでアインシュタイン方程式を解くことにより、フリードマン方程式および加速度方程式が導かれ、宇宙の時間発展がエネルギー密度と圧力によって決定されることを見た。特に、圧力が重力に寄与するという性質は相対論に特有のものであり、宇宙の加速膨張といった現象の理解に本質的な役割を果たしている。

また、状態方程式によって特徴付けられる流体の性質が、宇宙の進化を支配することを確認した。このような理論的枠組みは、宇宙マイクロ背景放射の等方性や音響ピーク、バリオン音響振動、Ia 型超新星による加速膨張の観測などと非常によく一致しており、流体としての宇宙という描像が観測的にも強く支持されていることがわかる。

以上のように、宇宙の大局的な振る舞いは、一様・等方な流体としての記述によって統一的に理解することができる。すなわち、宇宙論とは、一般相対論と流体力学が結びつくことによって成立する理論体系であり、その単純な枠組みの中に、宇宙の複雑な進化が内包されているのである。

(79 回生 N.T.)

参考文献

- [1] N. Breton, J. L. Cervantes-Cota, M. Salgado (Eds.), *The Early Universe and Observational Cosmology*, Springer.
- [2] B. D. Fields and S. Sarkar, “Big-Bang Nucleosynthesis”, in *Review of Particle Physics*,

Particle Data Group (2011, revised).

- [3] A. R. Choudhuri, *Astrophysics for Physicists*, Cambridge University Press (2010).
- [4] Planck Collaboration, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”, *Astronomy & Astrophysics* **641**, A6 (2020).

■おわりに

本日は物理研究部へお越しいただき、そしてこの部誌を最後まで読んでいただき、誠にありがとうございました。部員が書き上げた記事はお楽しみいただけただけでしょうか。

さて、私は高校受験で灘に入学し、仲のいい友達がいたからという（非常に浅はかな）理由で物理研究部に入部しました。しかし今では、この選択が私の視野を大きく広げてくれたと思っています。物理研究部では部員と一緒に講義やゼミなどの活動をするのですが、物理オリンピックでメダルを手にするような圧倒的な物理力をもつ人も中にはいるわけです。そういう人には何度も驚かされました。恥ずかしながら、私は彼らのように競技物理で結果を残せていないので、落ち込んだり焦ったりすることも多々ありました。それでも、みんなで協力しあって理解を進めていくのは、何物にも代えがたい楽しみでした。現象の背後にある理論の美しさに触れ、本質を追い求める過程そのものが、私にとっての物理の楽しさだと思っています。

物理と向き合うことで、世界の見え方はきっと劇的に変わっていきます。何気なく見上げる青い空も、電車で揺られるつり革も、全て物理という壮大な物語の一部です。その奥深さは、決して難しい数式によってのみ記述されるものではなく、「なぜだろう」と立ち止まって考えることそのものに宿っているんだと思います。苦手意識を持たれがちな物理ですが、これを読んで少しでも親近感を持っていただいたら嬉しいです。

最後になりますが、ここまで支えてくださった全ての人々に、心より感謝申し上げます。ぜひ、来年度も灘校文化祭にお越しください！

(79回生 部長 K.R.)