INFINITY

あの漸化式を深掘る

位数と原始根の拡張

合宿運営記・OMC writer 記

第 80 回灘校文化祭

数学研究部 部誌

MAY. 2026.

数学研究部　2026 年部誌

目次

P2〜P6	あの漸化式を深掘る	高校 3 年　加野琢雲
P7〜P13	位数と原始根の拡張	高校 3 年　濱本祐輔
P14〜P27	合宿運営記・OMC writer 記	高校 3 年　中口佳駿

まえがき

第 80 回文化祭 **Polaris** へようこそ！

第 80 回文化祭の数学研究部ブースに足を運び、そして部誌を手に取っていただきありがとうございます。本誌の校正・編集を担当しました波多野燿と申します。

本誌には、日頃数学について勉強、研究している部員が興味が湧いた事柄についてさらに深く学んでみたことが書かれています。今年は部の具体的な活動や部員が普段取り組んでいる競技数学についても詳しく紹介しています。これらの記事を通して部員の伝えたい数学の面白さや、部員の情熱を感じ取って頂ければ幸いです。

また、今年の文化祭で数学研究部は「部誌の配布」以外にも、「灘中入試模試・和田杯の配布」「数研遊戯の開催」「数研講義」を行っています。灘中入試模試・和田杯は部員が一年間かけて作成した問題が集められています。どれも手強いものばかりですが、頭を使って問題を考える楽しさを実感できる機会だと思いますのでぜひ挑戦してみて下さい。数研遊戯は来場者の皆さんと部員が、「シンプルだけど奥深いゲーム」で対戦するものです。どなたでもルールがわかりやすいものから数学のセンスが求められるものまで様々なゲームがあるので数研ブースに来られた際はぜひ遊びに来て下さい。数研講義では部員が数学の講義を行います。こちらも数学の知識がなくても楽しめるものや競技数学に関するものなどがあるので興味がある方はぜひパンフレットを確認してみて下さい。

最後に、この部誌のために記事を書いてくれた三人に感謝します。忙しいにもかかわらず面白い記事を書いてくれました。長くなりましたが、ここまで読んでくださってありがとうございます。部誌をお楽しみください。

高校 3 年　波多野 燿

あの漸化式を深掘る

高校3年 加野琢雲

1 はじめに

こんにちは、高3の加野琢雲です。数学オリンピックや Online Math Contest といった競技数学をやっていました。今は、ときどき競技数学の問題を考えたり作ったりしています。入試模試と和田杯にも問題を出しているので見ていただけると幸いです。

この記事では、半年ほど前から色々と考えていた「漸化式」について書こうと思います。漸化式の中でも、今回は、

$$a_n = a_{n-1}^2 - 2$$

という漸化式を詳しく見ていきます！

2 漸化式とは

まず、みなさん漸化式はご存じでしょうか。たとえば、次のようなものがそうです。

$$a_0 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + 2 \quad (1 \leq n)$$

数式の n に $1, 2, 3\cdots$ を代入していくと、順に $a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9, \ldots$ がわかりますね。このように、隣り合う項の関係で数列を定めるような式を漸化式と言います。この漸化式は数列 $(a_n) = (3, 5, 7, 9, \ldots)$ を表しています。また、これは

$$a_n = 2n + 3$$

と表すことができますね。このような、a_n を n だけ使った式で表した式を (a_n) の一般項といいます。

高校数学では多くの形の漸化式を扱います。例えば次のようなものがあります。

$$\begin{aligned} a_n &= pa_{n-1} + q \\ a_n &= \frac{pa_{n-1} + q}{ra_{n-1} + s} \\ a_n &= pa_{n-1}^q \\ a_n &= pa_{n-1} + qa_{n-2} \end{aligned}$$

初項を定めたとき、これらの漸化式を満たす数列の一般項はきれいに求まります。

しかし実は、一般項がきれいに求まる漸化式は非常に限られています。たとえば、次の漸化式を見てみましょう。

$$a_0 = 4, \quad a_n = a_{n-1}^2 + 1 \quad (1 \leq n)$$

一見、とても単純な漸化式に見えるかもしれません。ですが、この数列の一般項をきれいな形で書くことはできないんです！

高校数学で扱う漸化式のほとんどは、何らかの変形をすることで次のような**線形漸化式**と呼ばれる形に帰着させることができます。

$$a_n = p_0 a_{n-1} + p_1 a_{n-2} + \cdots + p_{k-1} a_{n-k}$$

この形の漸化式は一般項がきれいに求まることが知られています。逆に言えば、線形漸化式に帰着できないものは解くのが困難なのです。先ほどの漸化式も帰着することができません。

線形でない漸化式は**非線形漸化式**と呼ばれ、いろいろな研究がなされています。今回扱う漸化式も非線形漸化式の一つです！

3　本題の漸化式

改めて、今回扱う漸化式は次のようなものです。競技数学でよく出題される形のものです。

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad a_n = a_{n-1}^2 - 2 \quad (1 \leq n)$$

先ほど解けないといった漸化式によく似ていますが、この数列の一般項はきれいに求めることができるんです！これが漸化式の面白いところです。

3.1　一般項

この漸化式の一般項の求め方として、よく知られている方法は三角関数を使うものです。漸化式が cos の二倍角の公式に似ていることから、次のような変換を考えます。

$$a_n = 2\cos(b_n)$$

すると、漸化式は次のように書けます。

$$2\cos(b_n) = 4\cos^2(b_{n-1}) - 2$$
$$\cos(b_n) = \cos(2b_{n-1})$$

よって、$\cos\theta = \frac{3}{4}$ を満たすような θ を取って、

$$a_n = 2\cos\left(2^{n-1}\theta\right) \quad \left(\cos\theta = \frac{3}{4}\right)$$

と書けます。

しかし、三角関数を使っていて一般項と言っていいのか？と思う方もいらっしゃるでしょう。自分は、これを初めて見たときそう思いました。そこで、三角関数を使わない解き方を紹介します。

次のような変換を考えます。

$$a_n = b_n + \frac{1}{b_n}$$

これをもとの漸化式に代入してみましょう。

$$b_0 + \frac{1}{b_0} = \frac{3}{2}, \quad b_{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} = \left(b_n + \frac{1}{b_n}\right)^2 - 2$$

二つ目の式は次のように変形できます。

$$\begin{aligned} b_{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} &= \left(b_n + \frac{1}{b_n}\right)^2 - 2 \\ &= b_n^2 + \frac{1}{b_n^2} \end{aligned}$$

一つ目の式から

$$\begin{cases} b_0 + \dfrac{1}{b_0} = \dfrac{3}{2} \\ 2b_0^2 - 3b_0 + 2 = 0 \\ b_0 = \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

以上より、

$$b_0 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{4}, \quad b_{n+1} = b_n^2$$

としてよいことが分かります。そのため、

$$b_n = \left(\frac{3 + i\sqrt{7}}{4}\right)^{2^n}$$

とわかり、これを $a_n = b_n + \frac{1}{b_n}$ に代入すると

$$a_n = \left(\frac{3 + i\sqrt{7}}{4}\right)^{2^n} + \left(\frac{3 - i\sqrt{7}}{4}\right)^{2^n}$$

が求まるというわけです。これは紛れもなく一般項ですね。

3.2 二つの一般項の関係

数列 (a_n) の一般項を二つの方法で表すことができました。実は、この二つの表し方はとても似通っているんです。そのことを説明します。

オイラーの公式をご存じでしょうか。次のような式です。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ここで、e はネイピア数と言われる定数です。この式によって、虚数乗が定義できるようになります。 θ に $\theta, -\theta$ を代入した二式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

を両辺足し合わせることで

$$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

が成り立つことが分かります。

さて、三角関数を使った一般項は

$$a_n = 2\cos(2^{n-1}\theta) \quad \left(\cos\theta = \frac{3}{4}\right)$$

でした。 $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ は

$$e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{3}{2}$$

と言い換えられますから、これを $e^{i\theta}$ について解くと

$$e^{i\theta} = \frac{3+i\sqrt{7}}{4}$$

となります。以上から、

$$\begin{aligned} a_n &= 2\cos\left(2^{n-1}\theta\right) \\ &= e^{i2^{n-1}\theta} + \frac{1}{e^{i2^{n-1}\theta}} \\ &= \left(e^{i\theta}\right)^{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{2^{n-1}} \\ &= \left(\frac{3+i\sqrt{7}}{4}\right)^{2^n} + \left(\frac{3-i\sqrt{7}}{4}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

がわかります。三角関数を用いた一般項から三角関数を用いない一般項が導けましたね。このように、二つの一般項はオイラーの公式を用いた変形でつながっていることが分かります。

3.3　初項を変える

次に、初項を $\frac{3}{2}$ から 4 に変えた数列を考えてみましょう。

$$a_0 = 4, \quad a_n = a_{n-1}^2 - 2 \quad (1 \leq n)$$

$a_n = b_n + \dfrac{1}{b_n}$ で変換すれば問題なく解くことができますが、 $2\cos\theta = 4$ となるような実数 θ が存在しないので $a_n = 2\cos(b_n)$ で変換することができません。どうしましょうか。高校数学では扱いませんが、円（$x^2 + y^2 = 1$）で定義される三角関数に対して、双曲線（$x^2 - y^2 = 1$）で定義される双曲線関数というものがあります。$\sin, \cos, \tan$ に $\sinh, \cosh, \tanh$ が対応し、$\cosh$ は次のように定義されます。

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ と見比べると、指数が $i\theta$ から θ に変わっていることがわかります。$\cosh$ の値域は 1 以上であるため、 $2\cosh\theta = 4$ なる実数 θ を取ることができます。$a_n = 2\cosh(b_n)$ と置くと、漸化式は

$$\begin{aligned}\cosh(b_n) &= 2\cosh^2(b_{n-1}) - 1 \\ &= \cosh(2b_{n-1})\end{aligned}$$

と書け、 $b_n = 2b_{n-1}$ がわかるので

$$a_n = 2\cosh\left(2^{n-1}\theta\right) \quad (\cosh\theta = 2)$$

と一般項を双曲線関数を用いて表すことができます。

なお、双曲線関数を用いずに表すと、

$$a_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{2^n}$$

となりますね。

4　おわりに

以上、有名な漸化式の解法を深堀りしてみました。漸化式からオイラーの公式や双曲線関数の話ができるのは面白いですね。最後まで見ていただきありがとうございました！

位数と原始根の拡張

高校3年　濱本祐輔

1　はじめに

こんにちは、79 回生の濱本祐輔と申します。早いものでもう高校三年生になりました。普段は poino という名前で競技数学をしています。

ここで少し、競技数学について説明させてください。競技数学は、競技として数学の問題を解くものです。主に高校数学の範囲の幅広い問題を扱い、数学オリンピックや Online Math Contest(OMC) などのコンテストが開催されています。

さて、今回は競技数学の整数問題、そのなかでも位数や原始根とのその拡張についての面白い話を紹介します。

2　位数と原始根

まず、位数や原始根の定義とその色々な性質の話をします。

定義 1. 素数 p と互いに素な整数 a について,

$$a^d \equiv 1 \pmod p$$

を満たす最小の正整数 d を，法 p における a の**位数**と呼ぶ.

性質 2. 素数 p と互いに素な整数 a について，法 p における a の位数を d とすると，正整数 k について

$$a^k \equiv 1 \Leftrightarrow d \mid k$$

証明

($\Leftarrow$)　$\dfrac{k}{d}$ は整数なので，$a^k \equiv (a^d)^{\frac{k}{d}} \equiv 1 \pmod p$.

($\Rightarrow$)　対偶を示す．k を d で割った余り $0 < r < d$ について $a^r \equiv a^k \equiv 1$ が成り立つが，これは位数の最小性に矛盾. □

ここで、フェルマーの小定理と性質 2 を組み合わせると、次の性質が得られます。

性質 3． 素数 p と互いに素な整数 a について，法 p における a の位数を d とすると

$$d \mid p-1$$

ここまでで位数の基本的な性質をざっと見てきました。
さて、ここからの話で必要不可欠なのが次の定理です。

定理 4． p を素数とする．このとき，p と互いに素な整数 a であって，位数が $p-1$ であるようなものが存在する．これを $\bmod p$ における**原始根**と呼ぶ．
(原始根の存在定理)

証明は大変なので仕方ないですが今回はこの定理を認めてください。原始根について次の性質が得られます。

性質 5． 素数 p について，$\bmod p$ における原始根の一つを r とおくと，$r^1, r^2, \ldots, r^{p-1}$ を p で割った余りは $p-1$ 以下の正整数を一回ずつとる．

証明

$r^a \equiv r^b \pmod p$ を満たす $p-1$ 以下の正整数 a, b について，$r^{a-b} \equiv 1 \pmod p$ より $p-1 \mid a-b$ となる．よって $a=b$．
したがって，$r^1, r^2, \ldots, r^{p-1}$ を p で割った余りは全て相異なるので，題意は示された． □

性質 6． r を $\bmod p$ における原始根の一つとする．このとき正整数 n について r^n の位数は $\dfrac{p-1}{\gcd(p-1, n)}$ である．

証明

r^n の位数を d とおくと，d は $r^{dn} \equiv 1 \pmod p$ を満たす最小の正整数である．r は原始根なので，d は $p-1 \mid dn$ を満たす最小の正整数である．題意は示された． □

性質 7． p を素数，d を $d \mid p-1$ を満たす正整数とする．$\bmod p$ における位数が d であるような $p-1$ 以下の正整数はちょうど $\varphi(d)$ 個存在する．とくに原始根は $\varphi(p-1)$ 個存在する．

証明

性質 5 より，位数が d であるような $p-1$ 以下の正整数の個数は，$p-1$ 以下の正整数 k であって $d = \dfrac{p-1}{\gcd(p-1,k)}$ を満たすものの個数，すなわち $\gcd(p-1,k) = \dfrac{p-1}{d}$ を満たすものの個数である．したがって，この値は d 以下の正整数 i であって $\gcd(d,i) = 1$ を満たすものの個数，つまり $\varphi(d)$ である． □

3 位数と原始根の拡張

2 章では、累乗を素数で割った余りについて考えましたが、この章では合成数で割った余りがどうなるのか考えます。

まずは素べきで割ったときについて考えます。

> **性質 8.** p を奇素数，n を正整数とする．このとき，p と互いに素な整数 a であって，$a^k \equiv 1 \pmod{p^n}$ を満たす最小の正整数 k が $\varphi(p^n) = (p-1)p^{n-1}$ であるようなものが存在する．

証明

mod p における原始根 r をとると，

$$(r+p)^{p-1} \equiv r^{p-1} + r^{p-2}p(p-1) \pmod{p^2}.$$

である．よって，$r^{p-2}(p-1)$ が p と互いに素であることから $a \in \{r, r+p\}$ かつ $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ を満たす a をとることができる．

$a^k \equiv 1 \pmod{p^n}$ を満たす最小の正整数 k が $(p-1)p^{n-1}$ であることを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき，明らか．

(ii) $n = m$ での成立を仮定して，$n = m+1$ での成立を示す．

$a^k \equiv 1 \pmod{p^{m+1}}$ を満たす最小の正整数 k は正整数 l を用いて $k = l(p-1)p^{m-1}$ とおける．LTE の補題から，

$$v_p(a^k - 1^k) = v_p(a^{p-1} - 1^{p-1}) + v_p(lp^{m-1}) = m + v_p(l)$$

となるから，これが $m+1$ 以上となるような k の最小値は $k = (p-1)p^m$ であり，$n = m+1$ での成立が示された．

以上 (i),(ii) より示された． □

2 のべき乗のときは、LTE の補題の部分が変化するので、結果も少し変化します。

性質 9. n を正整数とする．このとき，任意の奇数 a について常に $a^k \equiv 1 \pmod{2^n}$ が成立する，最小の正整数 k は次の通り．

$$\begin{cases} k = 1 & (n = 1) \\ k = 2 & (n = 2) \\ k = 2^{n-2} & (n \geq 3) \end{cases}$$

したがって、中国剰余定理を用いれば次の定理が得られます。

定理 10. p を奇素数，e を正整数として，カーマイケル関数 $\lambda(n)$ を以下のように再帰的に定義する．

$\lambda(2) = 1, \lambda(4) = 2, \lambda(2^e) = 2^{e-2}\ (e \geq 3), \lambda(p^e) = (p-1)p^{e-1}$

さらに，正整数が $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ と素因数分解できるとき，

$$\lambda(n) = \mathrm{lcm}\{\lambda(p_1^{e_1}), \lambda(p_2^{e_2}), \ldots, \lambda(p_k^{e_k})\}$$

このとき，$\lambda(n)$ は正整数 n と互いに素な任意の正整数 a について常に $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ が成り立つような，最小の正整数 m である．

(カーマイケルの定理)

4 例題

例題.

正整数 n に対して，n 以下の n と互いに素な正整数の個数を $\varphi(n)$ で表す．

正の奇数 n であって，次の条件を満たす正整数 m がちょうど 30 個であるようなものを全て求めよ．

- m は n 以下の n と互いに素な正整数である．
- $\dfrac{m^k - 1}{n}$ が整数となるような正整数 k 全てにおける，$\gcd(\varphi(n), k)$ のとりうる値が 3 種類である．

(第 2 回 NMO 予選第 11 問)

実はここからが本題です。灘校数学研究部は 2024 年から数研競技数学合宿を開催しており、2025 年では私を含む 3 名が運営しました。その合宿の中で、日本数学オリンピックの予選を模した「灘数学オリンピック予選」(通称 NMO 予選) を実施しました。問題は公式 X から見ることができるので、よければ他の問題も解いてみてください。

今回解説するのは、そんな NMO 予選の問 11 です。当時書いた解説が非常にわかりにくいものとなっているので、改めて解説を作ってみようと思います。

n の素因数分解を $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ とおき、各 i における素べき $p_i^{a_i}$ における m の位数 d_i を定めると、性質 8 によって、m を $p_i^{a_i}$ で割った余りとしてあり得るのは $\varphi(d_i)$ 通りである、すなわちあり得る m は $\varphi(d_1)\varphi(d_2)\cdots\varphi(d_k)$ 通りあることがわかります。

さて、各 i について d_i を定めたとき、「$\dfrac{m^k-1}{n}$ が整数となるような正整数 k 全てにおける，$\gcd(\varphi(n), k)$ のとりうる値が 3 種類である」ことは、「mod n における m の位数を d としたとき，ある素数 p が存在して $d = \dfrac{\varphi(n)}{p^2}$ と表せる」ことと同値です。

ここで、定理 10 で用いた考え方から $d = \operatorname{lcm}(d_1, d_2, \cdots, d_i)$ なので、問題文は

任意の $p^2 \mid \varphi(n)$ を満たす素数 p について $\operatorname{lcm}(d_1, d_2, \ldots, d_k) = \dfrac{\varphi(n)}{p^2}$ かつ各 i において $d_i \mid \varphi(p_i^{a_i})$ を満たす正整数の組 $(d_1, d_2, \ldots, d_i)$ すべてにおける $\varphi(d_1)\varphi(d_2)\cdots\varphi(d_k)$ の総和が 30 となるような奇数 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ を全て求めよ.

と言い換えられます。
さて、ここからの議論では次の式を意識すると理解しやすいでしょう。

$$\operatorname{lcm}(d_1, d_2, \ldots, d_k) \mid \operatorname{lcm}(\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \ldots, \varphi(p_k^{a_k})) \tag{$\star$}$$

ある n について $p^2 \mid \varphi(n)$ を満たす p が 2 種類以上存在すると仮定し、そのうち 2 つを q, r とします。このとき、式 $(\star)$ から

- $\dfrac{\varphi(n)}{q^2} \mid \operatorname{lcm}(\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \ldots, \varphi(p_k^{a_k}))$
- $\dfrac{\varphi(n)}{r^2} \mid \operatorname{lcm}(\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \ldots, \varphi(p_k^{a_k}))$

なので、($a \mid b$ かつ $b \mid c$ を $a \mid b \mid c$ と略記すると)

$$\varphi(n) \mid \operatorname{lcm}(\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \ldots, \varphi(p_k^{a_k})) \mid \varphi(n)$$

より $\operatorname{lcm}(\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \ldots, \varphi(p_k^{a_k})) = \varphi(n)$ 、すなわち $\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \ldots, \varphi(p_k^{a_k})$ は互いに素なので、n は素べきです。ある p について $\varphi\left(\dfrac{\varphi(p_1^{a_1})}{p^2}\right)$ は 4 の倍数ではないので、$\dfrac{\varphi(p_1^{a_1})}{p^2}$ は素べきまたはその 2 倍であり、$\varphi(p_1^{a_1})$ は相異なる素数 q_1, q_2 と 2 以上の整数 m を用いて $q_1^2 q_2^m$、または奇素数 q_1, q_2 と 2 以上の整数 m を用いて $2q_1^2 q_2^m$ と表せます。どちらの場合も $m = 2$ のとき $(q_1 - 1)q_1 + (q_2 - 1)q_2 = 30$、$m \geq 3$ のとき

$(q_1-1)q_1(q_2-1)q_2^{m-3}+(q_2-1)q_2^{m-1}=30$ を満たす必要がありますが、このような相異なる q_1, q_2 はないことがわかります。したがって、それぞれの n について $d_1, d_2, \ldots, d_k$ が存在するような p は一意に定まります。

$p=2$ のとき、式 $(\star)$ から

$$\frac{\varphi(n)}{4} \mid \operatorname{lcm}(\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}), \ldots, \varphi(p_k^{a_k}))$$

となるので $k \leq 3$ です。ここからは少し重い作業パートです。

任意の k 以下の正整数 i について $\dfrac{\varphi(p_i^{a_i})}{d_i}$ は 2 べきである.

(i) $k=1$ のとき

$\varphi(p_1^{a_1})=124, 248$ となる必要があり不適.

(ii) $k=2$ のとき

$v_2(\varphi(p_1^{a_1}))=r_1, v_2(\varphi(p_2^{a_2}))=r_2$ とおく. $r_1 \leq r_2$ としてよい.

このとき, $r_1+r_2=\max(v_2(d_1), v_2(d_2))+2$ であるから, a を 3 以上の整数として

$$(r_1, r_2, v_2(d_1), v_2(d_2)) =$$

$$(1,1,0,0), (1,2,0,1), (1,2,1,0), (1,2,1,1), (1,a,1,a-1), (1,a,0,a-1),$$

$$(2,2,0,2), (2,2,1,2), (2,2,2,2), (2,2,2,1), (2,2,2,0), (2,a,0,a), (2,a,1,a), (2,a,2,a)$$

から, $(r_1, r_2)=(1,1), (1,2), (1,a), (2,2), (2,a)$ のとき $\varphi(\varphi(p_1^{a_1}))\varphi(\varphi(p_2^{a_2}))$ の値はそれぞれ $30, 20, 30, 10, 15$ となる.

$(r_1, r_2)=(2,a)$ のときは明らかに不適.

$(r_1, r_2)=(1,1), (1,a), (2,2)$ のときは $\varphi(\varphi(p_1^{a_1})), \varphi(\varphi(p_2^{a_2}))$ のいずれかが 1, すなわち $\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2})$ のいずれかは 2 となるので, $r_1=1$, すなわち $\varphi(\varphi(p_1^{a_1})), \varphi(\varphi(p_2^{a_2}))$ のいずれかが 30 となるが, $\varphi(\varphi(p^a))=30$ となるような素数 p と正整数 a の組は存在しない.

$(r_1, r_2)=(1,2)$ のとき $\varphi(\varphi(p_1^{a_1}))\varphi(\varphi(p_2^{a_2}))=20$ と合わせて $(\varphi(p_1^{a_1}), \varphi(p_2^{a_2}))=(22,4)$, すなわち $(p_1, a_1, p_2, a_2)=(23,1,5,1)$ となり, このとき $n=115$

(iii) $k=3$ のとき

$v_2(\varphi(p_1^{a_1}))=r_1, v_2(\varphi(p_2^{a_2}))=r_2, v_2(\varphi(p_3^{a_3}))=r_3$ とおく. $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ としてよい.

このとき, $r_1+r_2+r_3=\max(v_2(d_1), v_2(d_2), v_2(d_3))+2$ であるから, a を 2 以上の整数として

$$(r_1, r_2, r_3, v_2(d_1), v_2(d_2), v_2(d_3)) =$$

$$(1,1,1,0,0,1), (1,1,1,0,1,0), (1,1,1,0,1,1), (1,1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0,1),$$

$$(1,1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1,1), (1,1,a,0,0,a), (1,1,a,0,1,a), (1,1,a,1,0,a), (1,1,a,1,1,a),$$

から, $(r_1, r_2, r_3)=(1,1,1), (1,1,a)$ のとき $\varphi(\varphi(p_1^{a_1}))\varphi(\varphi(p_2^{a_2}))\varphi(\varphi(p_3^{a_3}))$ の値がそれぞれ $\dfrac{30}{7}, \dfrac{15}{2}$ となり不適.

$p \geq 3$ のとき、式 $(\star)$ から n は素べきです。

$\varphi(d_1)=30$ より $\varphi(p_1^{a_1})=62p^2$ となります。$p=3$ のとき $\varphi(p_1^{a_1})=558=13\times 43-1$ となり不適です。

$p \geq 5$ のとき，$a_1=1$ のとき $3 \mid p_1$ となり不適です。$a_1 \geq 2$ のとき $p_1=p$ なら $p_1-1=62$，$p_1=31$ なら $p_1-1=2p^2$ となりどちらも不適です。

以上から答えは $n=115$ のみであることがわかりました！
試験に適した問題・難易度であったかはさておき、改めて興味深いテーマだと思いました。

合宿運営記・OMC writer 記

高校 3 年　中口佳駿

1　はじめに

この記事では弊部で昨年 7 月に行った競技数学合宿の運営についてと，OnlineMathContest という競技数学のコンテストが行われているサイトで問題を出したことについて書いています．それぞれで出した問題なども一部載せているので，競技数学という数学のジャンルについて少しでも知っていただけると幸いです．

2　競技数学合宿運営記

2.1　概要

競技数学合宿では，1 日目に NMO 予選，2 日目に NMO 本選と整数の講義，3 日目にチーム戦と幾何の講義を行いました．整数の講義では二次体というものについて，幾何の講義では基本的な幾何を解くテクニックを扱いました．ここからは NMO とチーム戦について書きたいと思います．

2.2　NMO

NMO では日本数学オリンピック（JMO）という，国際数学オリンピック（IMO）へ参加する日本代表選手を選ぶため，日本国内で行う毎年多くの高校・中（小）学生が参加する数学コンテストを模したコンテストを行いました．

2.2.1　予選

予選では JMO と同様答えのみを求める問題 12 問のコンテストを行いました．全体として，開催前は 10, 11, 12 が難しい問題で強い人は 9 問解けるかなぐらいに考えていたのですが，開催してみると 8 で間違える人が多く最高が 8 完でした．ここではいくつかの問題を取り上げて紹介します．他の問題もご覧になりたい方は https://x.com/nada_mathclub/status/1948380957406302344（弊部の公式 X）をご覧ください．本誌の 10 ページでは第 11 問の解説を行っていますのでそちらもぜひご覧ください．

問題　（問題番号は実際のものと同じです）

4. 次の条件を満たす正整数 N のうち最大のものを求めよ．
- N の各桁の数と $2N$ の各桁の数を並べたとき，そのすべてが相異なる．
- N の各位の和と $2N$ の各位の和は等しい．

5. 黒色の碁石と白色の碁石が無数にあり，ここから 2025 個を取り出して横 1 列に並べると，以下を満たした．
- 両端の石を除く 2023 個の石のうち，両隣にある石の色が互いに異なるような石がちょうど 100 個ある．

このような石の並べ方は何通りあるか．ただし，反転して一致するような並べ方も異なるものとして数える．

6. 正整数に対して定義され正整数値を取る関数 $f(x)$ は任意の正整数 x, y に対して

$$f(x) \geq x, \quad f(f(x)) = x^2, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

を満たした．このとき，$f(10!)$ としてあり得る値はいくつあるか．

7. 鋭角三角形 ABC について，外心を O とし，O について A と対称な点を P とする．また，P を通り直線 BC に垂直な直線と直線 BC, CA, AB の交点をそれぞれ Q, R, S とすると

$$BC = 14, \quad PQ : QR : RS = 8 : 20 : 105$$

が成立した．このとき三角形 ABC の面積を求めよ．

解答・解説

4. 　N の各桁の和を S_1 ，$2N$ の各位の和を S_2 とすると，$S_1 = S_2$ および $S_2 \equiv 2S_1 \pmod 9$ が成り立つので，S_1, S_2 はともに 9 の倍数である．$S_1 + S_2 \leq 1+2+\cdots+9 = 45$ より $S_1 \leq 18$.

これらを踏まえて条件を満たす最大のものを考える．N と $2N$ のそれぞれの桁数の和が 10 のとき，$S_1 + S_2 = 45$ となる必要があるので不適．N と $2N$ のそれぞれの桁数の和が 9 のとき，$S_1 = 18$ のときのみ条件を満たし，$N, 2N$ ともに 9 を含まない．また N が 4 桁，$2N$ が 5 桁となるから．$2N$ の $10,000$ の位は 1．

ここで N のある位が 0 であると仮定すると，$2N$ の同じ位の数は $0, 1$ のいずれかになる必要があるがこのとき条件を満たさない．よって 0 は $2N$ のいずれかの桁に含まれる．また N の，$2N$ の 0 である位と同じ位の数は $0, 5$ のいずれかで 0 は不適なので 5．これらを用いて調べれば $N = 8532$ のときに最大となることが分かる．

N と $2N$ のそれぞれの桁数の和が 8 以下の場合は明らかに $N < 8532$ なので求める値は **8532** である．

5. 　左から奇数番目にある石の集合を A ，偶数番目にある石の集合を B とする．求める条件は A, B に含まれる石それぞれを左から順に並べたときに，隣り合う石の色が同じである石の組が 100 個存在することである．これを満たす石の並べ方は，A, B それぞれのもっとも左の石の色が $2 \times 2 = 4$ 通りあり，またどの石の組が同じ色であるかを決めればすべての石の色が一意に定まることから $\mathbf{4 \times {}_{2023}C_{100}}$ 通り．

6. 　$f(xy) = f(x)f(y)$ に $x = y = 1$ を代入することで $f(1) = f(1)^2$ を得るので $f(1) \geq 1$ とあわせて $f(1) = 1$．また正整数 a, b において $f(a) = f(b)$ ならば $a^2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b^2$ となるので $a = b$ で，対偶を取って $a \neq b$ ならば $f(a) \neq f(b)$ ．ここで素数 p において $f(p)$ の正の約数の個数が 4 個以上であると仮定すると，2 以上の相異なる整数 c, d であって $f(p) = cd$ となるものが存在するが，このとき $f(f(p)) = p^2$ および $f(f(p)) = f(c)f(d)$ が成り立つ必要がある。よって $c, d \geq 2$ より $f(c) = f(d) = p$ となるが，これは $c \neq d$ ならば $f(c) \neq f(d)$ となることに矛盾する．よって $f(p)$ が正の約数を 4 個以上持つことはなく，素数 q を用いて $f(p) = q, q^2$ と表される．また $f(x) \geq x$ および $f(f(x)) = x^2$ より，$p < q$ かつ $f(p) = q^2$ を満たすような素数 p, q の組は存在しない．これらを踏まえると，$f(2) = 3$ と $f(3) = f(f(2)) = 4$ がわかる．

　$f(5) = 7, 11, 13, 17, 19, 23$ であり，$f(5) = 7$ ならば $f(7) = 25$，また $f(5)$ がそれ以外ならば $f(7) = 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$ であるので $(f(2), f(3), f(5), f(7))$ としてあり得る値の組は $1 + 5 \times 10 = 51$ 通り．4 数が定まれば $f(xy) = f(x)f(y)$ を繰り返し用いることで $f(10!) = f(2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7) = f(2)^8 \times f(3)^4 \times f(5)^2 \times f(7)$ となるため $f(10!)$ の値が一意に定まり，また 4 数の値が異なれば $f(10!)$ の値も異なるので結局求める値は **51** である．

7. 　点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を D，直線 AD, PQ と三角形 ABC の外接円の交点のうち A, P でない方をそれぞれ E, F，三角形 ABC の垂心を H とすると，3 直線 AF, DQ, EP は平行である．また，D, Q は辺 BC の中点について対称なので $BD = CQ$ であるから，$QR : RF = QC : AF = BD : AF = QF : FS = a : b$ ．$QR : RS = 4 : 21$ より $a : b = 2 : 3$ であり，特に $BD : DQ : QC = 2 : 3 : 2$ であるから $CQ = 4$ ．

　また，H から辺 AC に下ろした垂線の足を X とすると，円周角の定理などを用いれば

$$\angle HBD = \angle XBC = 90^\circ - \angle ACD = \angle DAC = \angle EAC = \angle EBC = \angle EBD.$$

これと直線 BD, EH が直交していることから $HD = DE$ となり，また D, Q が BC の中点について対称であることから $OE = OP$ と合わせて $DE = PQ$ であることを用いれば，$BD : BQ = 2 : 5 = PQ : QR = DE : QR = DH : QR$ なので，B, H, R は同一直線上にあり，$\angle BRC = 90^\circ$ ．よって三角形 CQR と三角形 QRB は相似であり，$QR^2 = 4 \times 10$ だから $QR = 2\sqrt{10}$ ．さらに，三角形 CQR と三角形 CDA は相似なので，$AD = 2\sqrt{10} \times \frac{4+6}{4} = 5\sqrt{10}$ ．ゆえに求める三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \times 14 \times 5\sqrt{10} = \mathbf{35\sqrt{10}}.$

2.2.2 本選

本選では JMO と同様記述問題 5 問のコンテストを行いました．本選では一部の問題を除いて海外のコンテストなどからとってきた問題を使用しているためここでは問題については書きません．難易度は JMO と JJMO（日本ジュニア数学オリンピック、中学生以下が参加できるもの）の中間ぐらいの難易度だったと思います．

2.3 チーム戦

チーム戦では pilame 杯（高校生のみが参加できる，4 人以下のチームで戦う数学コンテストです．詳しくは公式サイト https://pilame.jp/ をご覧ください）を参考に， 4〜5 人チームで求値 24 問記述 8 問の形式で行いました．ここでもいくつかの問題を取り上げて紹介します．

問題 （問題番号は実際の問題番号とは異なります）

1. すべての項が 1 以上 5 以下の正整数である全 2025 項の数列であって，任意の連続する 3 項について，その 3 項を取り出して並び替えると 3 項の等差数列になるようなものはいくつあるか．例えば，$1, 1, 1, 1, \ldots$ や $1, 3, 5, 4, \ldots$ は条件を満たす．

2. 鋭角三角形 ABC の垂心を H ，外接円を ω とする．ω 上に $AH = AP$ を満たす点 P をとり，線分 PQ が ω の直径となるような点 Q をとると，

$$AQ = 5, \quad AB = 6, \quad AC = 7$$

が成立した．このとき，三角形 ABC の面積を求めよ．

3. 三角形 ABC について，角 A, B, C の二等分線と辺 BC, CA, AB との交点をそれぞれ D, E, F，直線 CF と直線 DE の交点を X ，三角形 ABC の外接円と直線 AD, AX の交点のうち A でない方をそれぞれ M, N とすると，(次のページに続く)

$$MN = NC, \quad BD = 4, \quad DC = 6$$

が成立した．このとき，三角形 ABC の面積を求めよ．

4. 202×5 のマス目があり，それぞれのマスに上下左右のいずれかの矢印が書かれており，以下の条件を満たした．

- 任意のマスからスタートして，「マスに書かれている矢印の向きに 1 マス移動する」という操作を繰り返すことで最初のマスに戻ることができる．
- 互いに向かい合っている矢印は存在しない．
- 3 列目に書かれた 202 個の矢印の中に，左向きの矢印は存在しない．

このような矢印の書き込み方はいくつあるか．

解答・解説 .

1. 条件を満たす数列の中に定数列は 5 つ存在する．また，定数列でなく条件を満たすすべての数列において以下が成立する．

- ある項の直前の 2 項に 3 が含まれない場合，その項は 3 である．
- ある項の直前の 2 項のいずれかが 3 の場合，その項としてあり得る値は 2 通りあり，それらは 3 ではない．

以上より，求める値は 3 の位置などを考慮して，$3 \times 4 \times 2^{\frac{2025}{3} \times 2 - 1} + 5 = \mathbf{3 \times 2^{1351} + 5}$.

2. 線分 BB' が ω の直径となるような点 B' について，$\angle BCB' = 90^\circ$ から $AH \perp BC$ と合わせて，$AH \parallel B'C$．また，

$$\angle AB'C + \angle B'CH = (180^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle BCH) = 180^\circ$$

が成り立つので，$AB' \parallel HC$ ．よって四角形 $AB'CH$ は平行四辺形である．すなわち $AP = AH = B'C$ なので線分 BB', PQ がともに ω の直径であることと合わせて三角形 APQ と三角形 $CB'B$ は合同で，$BC = AQ = 5$．よって，三角形 ABC の面積はヘロンの公式より，$\sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = \mathbf{6\sqrt{6}}$.

3. 三角形 ABC の内心を I とする．$MN = NC$ より $\angle CMN = \angle MCN$ であり，円周角の定理より $\angle DAX = \angle XAC$ となる．これと $\angle ACX = \angle XCD$ より点 X は三角形 ACD の内心である．また，

$$\angle XAI = \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle ADC - \angle ABC) = \angle EDC - \angle EBC = \angle XEI$$

となり直線 XI に関して A, E は同じ側にあるので，4 点 A, E, I, X は同一円周上にある．

よって，

$$\frac{1}{4}\angle BAC = \angle EAX = \angle EIC = \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

が成り立つので $\angle BAC = 120^\circ$．ここで $BD = 4$，$DC = 6$ であるから $AB = 2x$，$AC = 3x$ とすれば余弦定理より，

$$(2x)^2 + (3x)^2 - 2 \times 2x \times 3x \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 19x^2 = 100$$

であり，$x^2 = \frac{100}{19}$．よって，三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \times 2x \times 3x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{150\sqrt{3}}{19}}.$$

4. あるマスから始まってそのマスに戻ってくるまでに通るマスの集合をループと呼ぶこととする．2 つ目の条件より，ループは 2 列目のマスと 3 列目のマスをまたがることがなく，左 2 列と右 3 列に分けて考えられる．また，$n \times 2$ と $n \times 3$ のマス目における矢印の書き方をそれぞれ a_n と b_n で表す．

まず，a_n を考える．$n \times 2$ のマス目においては，すべてのループは縦が 2 マス以上，横が 2 マスの長方形を成す．また，縦の長さがどのような長さであっても，このループにおける矢印の書き方は 2 通りである．ここで，n 行目の 2 マスを含むループが成す長方形の縦の長さを考えると，縦の長さが 2 マスであるときは，$2 \times n-2$ のマス目に 2×2 のループを加えたと考えられるため $2a_{n-2}$ 通り，縦の長さが 3 マス以上であるときは，$2 \times n-1$ のマス目の $n-1$ 行目の矢印の向きを変えて n 行目を含むループとしたと考えられるため a_{n-1} 通り存在する．
よって，$a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1} (n \geq 3)$ が成り立ち，$a_1 = 0$，$a_2 = 2$ であることから $a_n = \frac{1}{3}(2^n + 2 \times (-1)^n)$ とできる．

次に，b_n を考える．$n \times 3$ のマス目 (n を偶数とする) においては，すべてのループは縦が正の偶数個のマス，横が 3 マスであるような長方形を成す．ある $2k \times 3$ のループにおいて，その矢印の描き方は 2 列目のマスなどを考えて 2^k 通りである．すなわち，それぞれのループがどこで区切られているかにかかわらず矢印の書き方は $2^{\frac{n}{2}}$ 通りあり，ループの区切り方は $2^{\frac{n}{2}-1}$ 通りあるので，$b_n = 2^{n-1}$ である．よって，

$$N = a_{202} \times b_{202} = \boldsymbol{\frac{2^{403} + 2^{202}}{3}}.$$

3　OMC writer 記

3.1　OMC とは

OMC(OnlineMathContest) とは，年齢を問わず世界中の誰もが無料で参加できる数学コンテストサイトで，年 80 回程度コンテストが開催されています．出たコンテストの成績に応じて rating が変動し，一定以上の rating のユーザーは自作問題を審査に出すことができます．その審査に通ればコンテストに出題することができ，その問題のいくつかを組み合わせて問題のセットとしてそのままコンテストとして出題することもでき，そのコンテストの問題の出題者を writer といいます．問題の分野は A (代数)，C (組み合わせ)，G (幾何)，N (整数) に分類されており，また問題の点数は 100 の倍数に設定されていて点数が高いほど難しい問題になっています．また，コンテストの種別には初心者向けの OMCB（for begineers），中ぐらいの難易度の OMC（regular），上級者向けの OMCE（ for experts）に分類されます．実際に私や数研の高校 3 年生で各種別のコンテストの 1 つずつに問題を出したので，そのときの問題や感想などについて書きたいと思います．問題の解答・解説は公式サイトの Problems からコンテスト種別を選び，対象の問題を選んでご確認ください.
※ 紙面の都合などにより，一部問題の書き方を変えています.
※ OMC については軽い説明しかしていないので，詳しい情報を知りたい方はホームページ（https://onlinemathcontest.com）のルールなどをご覧ください.

3.2　OMCE017

初めに数研 6 人が問題を作っている昨年 8 月に開催された OMCE017 についてです．このセットは配点が 300 − 300 − 600 − 600 − 600 − 700 ，分野が G − A − A − N − C − G で，割とこの種別の中でも普通〜難しめの回でした．ここでは何問かだけ取り上げたいと思います.

3.2.1　問題

- OMCE017(A)　300 点　分野 G　writer：Tatiueo
  三角形 ABC があり，その外接円を Γ とします．また，Γ の A を含まない方の孤 BC の中点を M，直線 BC に関して M と対称な点を N とします．辺 BC 上に点 D を，円 Γ 上に点 E をとると 4 点 A, N, D, E がこの順に同一直線に並び,
  $$AN = 9, \quad ND = 4, \quad DE = 3$$
  を満たしました．直線 MN に関して E と対称な点を F とするとき，線分 AF の長さは互いに素な正整数 a, b を用いて $\frac{a}{b}$ と表されるので，$a + b$ の値を解答してください.

- OMCE017(B)　300 点　分野 A　writer：eq_math
  a, b を実数とします．実数 t に関する方程式

$$\sqrt{2t^2+8t+16}+\sqrt{2t^2-2(a+b-5)t+a^2+(b-5)^2}=4\sqrt{2}$$

  が少なくとも 1 つの実数解を持つとき，xy 平面上の点 $P(a,b)$ が動きうる範囲の面積を求めてください．ただし，求める面積は互いに素な正整数 p, q ，および正整数 r を用いて $\frac{p}{q}\pi-\sqrt{r}$ と表されるので，$p+q+r$ の値を解答してください．

- OMCE017(C)　600 点　分野 A　writer：number_cat
  111 以下の正整数 i に対し，$a_i=4i^2-600i,\quad b_i=7i^2-800i$ と定めます．
  実数の組 $(c_1, c_2, \ldots, c_{111})$ であって，
  - $\max(a_1-c_1, a_2-c_2, \ldots, a_{111}-c_{111}) \leq \min(a_1+c_1, a_2+c_2, \ldots, a_{111}+c_{111})$
  - $\max(b_1-c_1, b_2-c_2, \ldots, b_{111}-c_{111}) \leq \min(b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots, b_{111}+c_{111})$

  をともに満たすもののうち，$c_1+c_2+\cdots+c_{111}$ が最小となるものは一意に存在するので，これを $(x_1, x_2, \ldots, x_{111})$ と置きます．このとき，x_1 の値を求めてください．ただし，求める値は互いに素な正整数 a, b を用いて $\frac{a}{b}$ と表されるので $a+b$ の値を解答してください．

- OMCE017(F)　700 点　分野 G　writer：kaaaaaaaa
  $AB \neq AC$ なる鋭角三角形 ABC の外接円を ω とします．A, B, C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とし，ω の A を含む方の孤 BC の中点を M，A を含まない方の孤 BC の中点を N とします．直線 DM と ω の交点のうち M でない方を X，直線 DN と ω の交点のうち N でない方を Y とします．直線 EF と直線 MN が点 P で交わっており，三角形 BCP の外接円と三角形 DXY の外接円が 2 点 Q, R で交わっています．辺 BC の中点を K とすると，$KP=3\sqrt{13}$ ，$QR=24$ が成り立ち，さらに三角形 KQR の外接円の半径は 13 となりました．このとき線分 BP の長さの 2 乗の値として考えられるものは 2 通り存在するので，それらの和を解答してください．

3.2.2　感想

- A 問題
  最初の問題にしては割と難しめの幾何の問題でした．結構いろいろな解法ができるので公式サイトをぜひ見ていただければと思います．
- B 問題
  受験数学寄りの代数の問題でした．最初 200 点で提出していたらしいんですが割と 300 点の中でもむずかしめだと思います．

- C 問題
  競技プログラミング寄りの代数の問題でした．その手の問題になれていないと多少厳しいんですがかなり面白い問題なのでぜひゆっくり考えてみてください．
- D 問題
  かなり計算重いので人力でやるとかなり時間かかるんですが，逆にこのおかげでこのころ蔓延っていた AI 等を用いた不正勢を炙り出すことに成功した問題です（順位表の上位の方で – と表示されてアカウントがなくなってる人のうち数人が不正勢とされ BAN された人です）．
- E 問題
  私が作った問題なのですが，初めての高難易度作問だったこともあり慣れておらず組み合わせパートはそこそこでそこから計算みたいになってしまったのでここでは載せていません．
- F 問題
  幾何でちゃんと最終問題らしく激ムズなんですがなぜか 22 人も解いています．私は全く解ける感じがしなかったので幾何が得意という人だけ解くことをお勧めします．

3.3 OMC262

次に数研の高校 3 年生 4 人が問題を作っている昨年 9 月に開催された OMC262 についてです．このセットは配点が 100 – 200 – 400 – 400 – 500 – 500 で，F が思ったより解かれなかったのですが，E まではそこそこの難易度で標準的なセットだったかなと思います．

3.3.1 問題

- OMC262(A)　100 点　分野 N　writer: poino
  n^3-3n+2 が 2025 の倍数となる最小の 2 以上の整数 n を求めてください．

- OMC262(B)　200 点　分野 G　writer: Nyarutann
  円 ω に内接する四角形 $ABCD$ があり，対角線 AC, BD は点 P で直交します．線分 CP 上の点 Q が $AP=PQ$ をみたしており，直線 BQ と円 ω の交点のうち B でない方を R とすると，$PQ=9$，$CR=11$，$DR=15$ が成り立ちました．このとき，四角形 $ABCD$ の面積は互いに素な正整数 a,b を用いて $\frac{a}{b}$ と表されるので，$a+b$ の値を解答してください．

- OMC262(C)　400 点　分野 C　writer: poino
  2025 個の整数からなる組 $(x_1, x_2, \dots, x_{2025})$ であって，どの項も $0,1,2$ のいずれかであり，$x_1+x_2+\cdots+x_{2025}=3000$ をみたすものについて，そのスコアを次のように定めます．(次のページに続く)

- $x_i = 1$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, 2025\}$ の個数を S としたとき，その組のスコアは 2^S である．

このとき，上の条件を満たすような組すべてに対するスコアの総和を素数 2027 で割った余りを求めてください．

- OMC262(D)　400 点　分野 G　writer: Tatiueo
  $AB = 7$, $AC = 12$ を満たす三角形 ABC の外接円を Γ とし，$\angle BAC$ の二等分線と Γ の交点のうち A でない方を M，直線 AM と辺 BC の交点を P とします．また，線分 AM 上に点 Q を取ると，$BQ = 4$, $\angle APB = \angle QBM$ が成り立ちました．
  このとき線分 AM の長さの 2 乗の値は互いに素な正整数 a, b を用いて $\frac{a}{b}$ と表されるので，$a + b$ の値を解答してください．

- OMC262(E)　500 点　分野 A　writer: eq_math
  数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\ldots}$ が次を満たしています．
  $$0 \leq a_0 \leq 6, \qquad a_{n+1} = a_n^3 - 3^{3^n+1} \cdot a_n^2 + 3^{3^{n+1}+1} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$
  このとき，a_{2025} としてありうる最大値を M，$a_{2025} = M$ となるときに a_0 がとりうる実数値の個数を N としたとき，$M + N$ を素数 2027 で割った余りを解答してください．

- OMC262(F)　500 点　分野 N　writer: Nyarutann
  50 以上の素因数を持たない正の 8 の倍数 N であって，以下の条件をすべてみたすものはいくつありますか．ただし，$\varphi(N)$ で N と互いに素であるような N 以下の正の整数の個数を表すものとします．
  - 50 以上の素因数を持たない正の整数 N' であって，$\varphi(N') = \varphi(N)$ となるものは $N' = N$ のほかに存在しない．また，N の正の約数の個数を M としたとき，M は 10^{10} 以下であり，M の正の約数の個数は 20 個である．

3.3.2　感想（一部解法のネタバレ含む）

- A 問題
  最初の問題らしく解きやすく，あまり競技数学になれていない人もとっつきやすいと思うのでぜひ解いてみてください．
- B 問題
  内心の有名構図の一部を取り出したみたいな問題です．これもとっつきやすい問題だと思うのでぜひ解いてみてください．

- C 問題

  母関数という考え方の基本的な問題でした．母関数を知らなくても組合せ論的解釈で解くことができるのですが，どちらにしろ後半の計算パートで苦戦している人が多かった印象です．
- D 問題

  基本的なテクニックを組み合わせた幾何の問題です．結構きれいに解けるので気になる方はぜひ公式解説をご覧ください．
- E 問題

  うまく式変形して解きやすい三角関数の形または簡単な三次関数の形に変えるという問題です．なれてないと思いつきにくいんですが面白い問題です．
- F 問題

  パズルのような特殊な問題で，苦戦する人が多かった印象です．使うテクニックは多くないので時間をかけて実験などをしてみれば解ける方も多いと思います．

3.4 OMCB063

最後に私 1 人が単独で問題を作っている昨年 12 月に開催された OMCB063 についてです．このセットは初心者向けのセットということもあり，典型的な問題やとっつきやすい問題を多く入れたつもりなので，ぜひ前半の方だけでも解いていただければと思います．

3.4.1 問題

- OMCB063(A)　100 点　分野 C

  A 君含む 9 人が以下のゲームを行います．

  - 9 人一斉に手の表または裏を出す．このとき，より多く出ている手の向きを出していた人全員が勝ちである．（たとえば，手の表を 5 人，裏を 4 人が出していたとき，手の表を出していた人が勝ち．なお，全員が同じ手の向きを出した場合全員の勝ちとする．）

  9 人全員が等確率で手の表・裏を出すとき，A 君が勝つ確率は互いに素な正整数 a, b を用いて $\frac{a}{b}$ と表されるので， $a+b$ の値を解答してください．

- OMCB063(B)　100 点　分野 G

  円に内接する四角形 $ABCD$ において，三角形 ABC の内心，三角形 ADC の内心をそれぞれ I_1, I_2 としたとき，$\angle I_1AI_2 = 50°$，$\angle CI_1I_2 = 63°$ が成り立ちました．このとき，$\angle CI_2I_1$ の大きさを度数法で求めてください．

・OMCB063(C)　100 点　分野 N

次の条件を満たす 999 以下の正整数 N はいくつありますか？

・N は 9 の倍数であり，N の各位の和は N を割り切らない．

・OMCB063(D)　200 点　分野 A

実数列 a_n は以下の条件をすべて満たします．

・任意の正の整数 n に対し，$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ となる．

・$a_1 + a_4 + a_7 = 123, \quad a_2 + a_5 + a_8 = 456, \quad a_{10} = a_1 + 1000.$

このとき，$a_3 + a_6 + a_9$ の値を解答してください．

・OMCB063(E)　200 点　分野 N

正の整数 p, q, r は素数であり，$p^4 + 2q^2 + 4r$ が平方数となりました．このとき，積 pqr としてあり得る値のうち小さい方から $1, 2, 3$ 番目の数の総和を求めてください．

・OMCB063(F)　200 点　分野 C

正 10 角形の各頂点に 1 以上 10 以下の相異なる正整数を 1 つずつ書き込み，この書き込み方に対してスコアを次のように定めます．

・10 個の辺について，その端点に書きこまれた 2 数の最大公約数を足し合わせた数．

スコアとして考えられる最大値を M としたとき，スコアが M となるような書き込み方は何通りありますか？ただし，回転や裏返しによって一致する書き込み方は区別します．

・OMCB063(G)　300 点　分野 A

2000 以下の正整数の集合の空でない部分集合 S について，そのスコアを以下のように定めます．

・S の要素を単調増加になるように並べたときに，奇数番目にある数の総和と偶数番目にある数の総和の差の絶対値

S としてありうるものは $2^{2000} - 1$ 個ありますが，それら全てに対するスコアの総和を素数 997 で割った余りを求めてください．

・OMCB063(H)　300 点　分野 G

鋭角三角形 ABC において垂心を H，直線 AH と直線 BC の交点を D，直線 BH と直線 AC の交点を E とします．三角形 ACD の外接円と直線 BH の交点のうち AC について B と反対側にある方を X とすると，$BC = 200$，$EH = 50$，$CX = 196$ が成り立ちました．このとき，線分 BX の長さを求めてください．

3.4.2 感想（一部解法のネタバレ含む）

- A 問題

  典型的な組み合わせの問題で，学校でとある先生が開発したじゃんけんから着想を得ました．個人的には 100 の中でもむずかしい方だと思っていたのですが，意外と解いてる人が多かった印象です．

- B 問題

  基礎的な角度計算の幾何の問題です．100 点の幾何の問題には算数っぽい問題も出題されることが多いのですが，ほとんどのある程度の難易度の幾何で解くのに必要な角度計算の簡単めな問題を出題しました．

- C 問題

  典型的な整数の問題です．割と似た問題はけっこう出題されていますが，重要な知識も使っているので出題しました．

- D 問題

  パズルみたいな代数の問題です．この問題は過条件と言って $a_1+a_4+a_7=123$ という条件がなくても解けるのですが，この条件がないと推測で解けてしまうのでつけています．私含め過条件が嫌いな人もいるので，二つ目以降の条件で $a_1+a_4+a_7$， $a_1+a_5+a_9$， a_7 の値を与えて a_{11} の値を求める問題として出題することも提案させていただいたのですが，元のものでもいいと運営さんに判断していただいたので元の形で出題しました．

- E 問題

  典型的な整数の問題です．OMC の性質上証明なしでも正答を得ることができますが，典型的な証明手法なのでちゃんと解いてくれる人が多いといいなと思いながら出題しました．欲を言えば非自明な解があったらよかったですね．

- F 問題

  パズルみたいな組み合わせの問題です．この問題も記述するとなると少し重いので最初 300 点で審査されたのですが直感的に解けるということで最終的に 200 点で出題されました．

- G 問題

  代数っぽい組み合わせの問題で，このセットの中では割と気に入っている問題です．最初は組み合わせ的な解き方で出していて，解いている方も同じような考え方が多いのですが公式解説は代数で解いています．運営さん賢いですね．

- H 問題

  相似などを用いた幾何の問題です．当初は方べきの定理を組み合わせることを想定していたのですが，公式解説のようにコンパクトに解くこともできます．本当はもう少し考察パートを増やして計算を減らしたかったんですがこの形で出題しました．

4　おわりに

この記事では弊部で開催された競技数学合宿や OMC に出題した様々な競技数学の問題について扱ってきました．JMO などの各世代ごとの競技数学の大会や，誰でも参加できる OMC といった競技数学のコンテストはたくさんあるので，競技数学に興味を持ってこれらのコンテストに参加していただける人が増えると幸いです．

最後まで読んでいただきありがとうございます！
以下のリンクから過去の部誌も読めます。ぜひお読みになってみて下さい。

数研公式 HP 資料室